DS7

Devoir surveillé du 26/05/2025 - Sujet B

Durée : 4h00.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Problème 1

Partie I. Étude de deux applications

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égaux à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On définit les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & \dfrac{1}{2}\left[P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right] \end{array}$$

et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}.$$

1. (a) Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
   (b) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, en indiquant les calculs intermédiaires.
   (c) L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. (a) Montrer que φ est une forme linéaire.
   (b) Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$? Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
   (c) L'application φ est-elle injective ? surjective ?

Partie II. Calcul des puissances successives d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B}' = (1, -2X+1, 6X^2-6X+1)$.

3. (a) Justifier que la famille $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
   (b) Écrire la matrice de passage Q de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
   (c) Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.
4. (a) Écrire la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.

(b) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neufs coefficients de A^n.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c.

On rappelle que l'on note $f^0 = Id_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

(d) En déduire que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi\left(f^n(P)\right) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie III. Une autre preuve du résultat précédent

5. On souhaite retrouver le résultat de la Partie II d'une autre manière.

   (a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

   (b) En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi\left(f^n(P)\right) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Problème 2

Les parties I et II sont largement indépendantes, seul le résultat de la question 5.(c) est utile pour la partie II.

Partie I : Calcul de la somme d'une série convergente.

1. À l'aide d'intégrations par parties successives, vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

2. Établir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout t de $]0, \pi]$:

$$\frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} e^{it} = \frac{\sin\left(\frac{tm}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} e^{\frac{i(m+1)t}{2}}, \quad \text{puis} \quad \sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \frac{\cos\left(\frac{(m+1)t}{2}\right) \sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

3. Soit $u : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t)\ \mathrm{d}t \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. Soit l'application $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \text{si } t \in]0, \pi] \quad \text{et} \quad f(0) = -1.$$

(a) Montrer que f est continue sur $[0, \pi]$.

(b) Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

(c) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

5. (a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, exprimer $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$, $\sin(b)$. En déduire l'expression de $\sin(a)\cos(b)$ en fonction de $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$.

   (b) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right) \mathrm{d}t.$

   (c) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente.

6. (a) Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in ([0, +\infty[)^2$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

   (b) Montrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge.

   On note S l'application définie, pour tout x de $[0, +\infty[$, par $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

7. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

8. (a) Établir : $\forall (x, y) \in ([0, +\infty[)^2, \; S(y) - S(x) = (y-x) \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

   (b) En déduire : $\forall (x, y) \in ([0, +\infty[)^2, \; |S(y) - S(x)| \leq \dfrac{\pi^2}{6} |y - x|$.

   (c) Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0, +\infty[$.

9. (a) Montrer, pour tout couple (x, y) de $([0, +\infty[)^2$ tel que $x \neq y$:

$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leqslant |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

   (b) En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

   (c) Préciser les valeurs de $S'(0)$ et $S'(1)$.

10. Montrer que S est concave sur $[0, +\infty[$.

11. Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}.$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \varphi(n).$$

En déduire que pour tout $N \geq 2$:

$$\sum_{n=1}^{N} \varphi(n) - \varphi(1) \leq \ln\left(\frac{N}{N+x}\right) + \ln(1+x) \leq \sum_{n=1}^{N-1} \varphi(n).$$

(b) En déduire que :

$$\ln(1+x) \leq S(x) \leq \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}.$$

(c) Conclure que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x+1)$. En déduire que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.

12. (a) Dresser le tableau de variation de S, en précisant la limite de S en $+\infty$.

    (b) Tracer l'allure de la courbe représentative de S.

Exercice supplémentaire

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et f un endomorphisme non nul de E satisfaisant $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ et $\mathrm{rg}(f) = 1$.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle l'endomorphisme f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
