DS8

Devoir surveillé du 25/04/2026

Durée : 3h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1 (Développement asymptotique d'une suite implicite)

1. **Résultat préliminaire.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. Montrer que si $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell \in (\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}) \cup \{+\infty\}$, alors :
$$\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(y_n).$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation :
$$x + e^x = n. \tag{E_n}$$
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (E_n) possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) En déduire la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et justifier que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{x_n})$.
   (d) Justifier que $e^{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. En déduire un équivalent de x_n.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - \ln(n)$.
   (a) En utilisant (E_n), Montrer que $e^{y_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.
   (b) Déterminer la limite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire un équivalent de $e^{y_n} - 1$.
   (c) À l'aide des questions précédentes, montrer que :
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle *converge à l'ordre 1* et on note alors $(R_{1,n})_{n\geq n_0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :
$$\forall n \geq n_0, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$
Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ *converge à l'ordre 2* et on note $(R_{2,n})_{n\geq n_0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :
$$\forall n \geq n_0, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$
Plus généralement, pour tout entier $p \geq 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ *converge à l'ordre p* et on note alors $(R_{p,n})_{n\geq n_0}$ la suite des restes de cette série :
$$\forall n \geq n_0, \quad R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$
Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n.

Partie I. Cas d'une série géométrique

Dans cette partie, on considère $q \in]-1,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = q^n$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge à l'ordre 1, et calculer $R_{1,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que la série $\sum u_n$ converge à l'ordre 2 et calculer $R_{2,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la série $\sum u_n$ converge à l'ordre p pour tout $p \geq 1$.

Partie II. Cas d'une série de Riemann

Dans cette partie, on considère $\alpha > 0$ et pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ soit convergente d'ordre 1.
5. On suppose $\alpha > 1$.
   (a) À l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que $R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ soit convergente d'ordre 2.
6. **Un lemme technique sur l'équivalence des restes.**
   (a) Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites qui ne s'annulent pas. Justifier soigneusement l'équivalence suivante :
   $$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |a_n - b_n| \leq \varepsilon\,|b_n|\,.$$
   (b) Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites à valeurs strictement positives. On suppose que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge, et que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, de sorte que $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ est également convergente.

   Pour $n \geq 1$, on note $R_n^a = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $R_n^b = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k$. Montrer à l'aide de la question précédente que $R_n^a \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n^b$.
7. Déduire des questions précédentes une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ soit convergente d'ordre $p \geq 1$.

Partie III. Cas d'une série alternée

Dans cette partie, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8. Justifier que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge à l'ordre 1.
9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t$, montrer que :
   $$\sum_{k=0}^{n} u_k = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

(c) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, et que pour tout $n \geq 0$:
$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

10. Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geq 0$:
$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 3.

Une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *semi-magique* s'il existe un réel, que l'on notera $d(A)$, tel que
$$\forall i \in [\![1,n]\!],\quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = d(A) \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1,n]\!],\quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = d(A).$$

Autrement dit, une matrice est semi-magique si toutes ses lignes et toutes ses colonnes ont la même somme $d(A)$.

On note SMag_n l'ensemble des matrices semi-magiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Partie I. Structure de SMag_n

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est dans SMag_n si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AJ = JA = \lambda J$.

   Quel rapport y a-t-il alors entre $d(A)$ et λ ?

2. Prouver que SMag_n est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que l'application $d : A \mapsto d(A)$ est une application linéaire de SMag_n dans $\mathbb{R}$.

3. Montrer que SMag_n est également un sous-anneau de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et que d est un morphisme d'anneaux de SMag_n dans $\mathbb{R}$.

4. Montrer que si $A \in \mathsf{SMag}_n$ est inversible, alors $d(A) \neq 0$ et $A^{-1} \in \mathsf{SMag}_n$. Exprimer alors $d\left(A^{-1}\right)$ en fonction de $d(A)$.

5. Est-ce qu'inversement, si $d(A) \neq 0$, alors A est inversible ?

Partie II. Dimension de SMag_n

Dans la suite, on notera $\mathsf{SMag}_n^0 = \mathrm{Ker}(d)$, qui est donc un sous-espace vectoriel de SMag_n puisque noyau d'une application linéaire définie sur SMag_n.

6. Montrer que $d : \mathsf{SMag}_n \to \mathbb{R}$ est surjective. En déduire que :
$$\dim(\mathsf{SMag}_n^0) = \dim(\mathsf{SMag}_n) - 1.$$

7. Montrer que $\mathrm{SMag}_n = \mathrm{SMag}_n^0 \oplus \mathrm{Vect}(J)$.

8. Considérons l'application

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathsf{SMag}_n^0 & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}) \\ A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} & \longmapsto & (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1} \end{array}$$

qui a une matrice semi-magique de taille n associe la matrice de taille $n-1$ obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne. On admet que ψ est linéaire.

Prouver qu'il s'agit d'un isomorphisme entre SMag_n^0 et $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de SMag_n.

9. Pour tout $(i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2$, on pose $A_{i,j} = E_{i,j} + E_{n,n} - E_{i,n} - E_{n,j}$.

Montrer que $(A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1}$ est une base de SMag_n^0, et en déduire une base de SMag_n.

Partie III. Dimension de Mag_n

Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *magique* si elle est semi-magique et si de plus :

$$\operatorname{tr}(A) = d(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n-k+1}.$$

On note Mag_n l'ensemble des matrices magiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathsf{Mag}_n^0 = \mathsf{SMag}_n^0 \cap \mathsf{Mag}_n$.

10. Montrer que Mag_n est un sous-espace vectoriel de SMag_n, mais que ce n'en est pas un sous-anneau.

11. Montrer que $\dim(\mathsf{Mag}_n) = \dim(\mathsf{Mag}_n^0) + 1$.

12. Soit $\theta : \begin{array}{ccc} \mathsf{SMag}_n^0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ A & \longmapsto & \left(\operatorname{tr}(A), \sum_{k=1}^{n} [A]_{k,n-k+1}\right) \end{array}$.

    (a) Calculer $\theta(A_{1,1})$ et $\theta(A_{2,2})$. En déduire que θ est surjective.

    (b) En déduire la valeur de $\dim(\mathsf{Mag}_n)$.