

Correction du concours blanc 1

Exercice 1 (Probabilités)

1. Remarquons que A_1 est l'événement certain Ω (on ne peut avoir deux boules rouges consécutives en un seul tirage), de sorte que $A_1 \cap B_1 = B_1$. Ainsi :

$$p_1 = P(A_1 \cap B_1) = p(B_1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad q_1 = P(A_1) = 1.$$

De même, on remarque que $A_2 \cap B_2 = B_2$ puisque $B_2 \cap A_2$, et $A_2 = \overline{R_1 \cap R_2}$, de sorte que :

$$p_2 = P(A_2 \cap B_2) = P(B_2) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad q_2 = P(A_2) = 1 - P(R_1 \cap R_2) = 1 - P(R_1)P(R_2) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

en notant que les événements R_1 et R_2 sont indépendants, le premier tirage n'influant pas sur la composition de l'urne et ce qu'il advient au deuxième tirage.

2. Remarquons que pour tout $n \geq 2$, $A_{n+1} \subset A_n$. En particulier, $A_n \subset A_2$, d'où par croissance de la probabilité :

$$q_n = P(A_n) \leq P(A_2) = \frac{5}{6}.$$

D'autre part, A_n contient l'événement $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$. Par croissance de la probabilité et indépendance des événements B_1, \dots, B_n :

$$q_n = P(A_n) \geq P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = P(B_1) \times P(B_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n+1} \leq q_n \leq \frac{5}{6}$.

3. Soit $n \geq 2$. Comme remarqué plus haut, $A_n \subset A_{n-1}$, de sorte que $A_n \cap B_n \subset A_{n-1} \cap B_n$.

Mais on peut dire davantage. En effet, si $A_{n-1} \cap B_n$ est réalisé, c'est qu'on n'a pas obtenu deux boules rouges consécutives lors des $n-1$ premiers tirages et qu'on a obtenu une boule blanche au n -ème tirage. Dans ce cas, on n'a pas non plus obtenu deux boules rouges consécutives lors des n premiers tirages. Ainsi, $A_{n-1} \cap B_n$ est contenu dans $A_n \cap B_n$.

Par double inclusion, $A_n \cap B_n = A_{n-1} \cap B_n$.

4. Soit $n \geq 2$. Par la question précédente, $A_n \cap B_n = A_{n-1} \cap B_n$. Et les événements A_{n-1} et B_n sont indépendants, la composition de l'urne au n -ème tirage étant la même quelque soit les résultats obtenus aux $n-1$ premiers tirages. Ainsi :

$$p_n = P(A_n \cap B_n) = P(A_{n-1} \cap B_n) \stackrel{\text{indépendance}}{=} P(A_{n-1})P(B_n) = q_{n-1} \times \frac{n}{n+1}.$$

5. Soit $n \geq 2$. La formule attendue faisant notamment intervenir les événements A_n et $A_n \cap B_n$, on est naturellement amené à décomposer A_n dans le système complet d'événements $\{B_n, \overline{B_n}\}$:

$$A_n = (A_n \cap B_n) \sqcup (A_n \cap \overline{B_n}).$$

Par incompatibilité :

$$q_n = P(A_n \cap B_n) + P(A_n \cap \overline{B_n}) = p_n + P(A_n \cap \overline{B_n}).$$

Mais $A_n \cap \overline{B_n} = A_n \cap R_n = A_{n-2} \cap B_{n-1} \cap R_n$ car A_n se réalise avec l'obtention d'une boule rouge au n -ème tirage si, et seulement si, on n'a pas obtenu deux boules rouges consécutives lors

des $n - 2$ premiers tirages et on a obtenu une boule blanche puis une boule rouge lors des tirages $(n - 1)$ et n . Ainsi, en utilisant une nouvelle fois l'indépendance des tirages :

$$P(A_n \cap \overline{B_n}) = P(A_{n-2} \cap B_{n-1} \cap R_n) = P(A_{n-2} \cap B_{n-1})P(R_n) = p_{n-1} \frac{1}{n+1}.$$

D'où l'égalité voulue :

$$q_n = p_n + \frac{1}{n+1}p_{n-1}.$$

6. Soit $n \geq 2$. En multipliant l'égalité précédente par $\frac{n+1}{n+2}$, on obtient avec le résultat de la question 4 :

$$p_{n+1} = q_n \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}p_n + \frac{1}{n+2}p_{n-1} = p_n - \frac{1}{n+2}p_n + \frac{1}{n+2}p_{n-1}.$$

Et donc :

$$p_{n+1} - p_n = -\frac{1}{n+2}(p_n - p_{n-1}).$$

7. En itérant la formule récursive obtenue à la question précédente, on obtient pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= -\frac{1}{n+2}(p_n - p_{n-1}) = \frac{(-1)^2}{(n+2)(n+1)}(p_{n-1} - p_{n-2}) \\ &= \dots = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)(n+1)\dots 4}(p_2 - p_1). \end{aligned}$$

Par les calculs effectués, $p_1 = \frac{1}{2}$ et $p_2 = \frac{2}{3}$, donc $p_2 - p_1 = \frac{1}{6}$ et :

$$p_{n+1} - p_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)!}.$$

Et cette égalité est également valable pour $n = 1$. On obtient alors par sommation télescopique que pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} p_n &= p_n - p_1 + p_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (p_{k+1} - p_k) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{(k+2)!} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n+1} \frac{(-1)^{k-3}}{k!} = \frac{1}{2} - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

8. On reconnait dans l'expression précédente la somme partielle d'ordre $n + 1$ de la série exponentielle de paramètre -1 , de sorte que $\lim p_n$ existe et vaut $1 - e^{-1}$. Et donc :

$$q_n = p_n + \frac{1}{n+1}p_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-1} + 0 = 1 - e^{-1}.$$

Exercice 2 (Fonction zêta de Riemann)

1. C'est du cours : la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$ converge si, et seulement si, $x > 1$. On notera donc $D =]1, +\infty[$.

2. Soient x, y dans D tels que $x \leq y$. Pour tout $n \geq 1$:

$$n^x \leq n^y, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{n^x} \geq \frac{1}{n^y}.$$

Soit $N \geq 1$. Par somme des inégalités précédentes pour $n = 1, \dots, N$:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^y}.$$

Par passage à la limite quand $N \rightarrow +\infty$ dans les inégalités (tout converge) :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^y} = \zeta(y).$$

Donc ζ est décroissante sur D .

Montrons qu'elle est strictement croissante. Pour cela, supposons que $\zeta(x) = \zeta(y)$. Alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^y} \right)}_{\geq 0} = 0.$$

Or une somme (même infinie) de termes positifs positifs est nulle si, et seulement si, tous ses termes sont nuls. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^y}.$$

Et pour $n = 2$ par exemple, on obtient $-x \ln(2) = -y \ln(2)$ en prenant le logarithme, et donc $x = y$.

Ainsi, ζ est strictement décroissante sur D .

Partie 0 - Un résultat préliminaire

3. (a) La fonction $t \mapsto f(c) + (t - c)f'(c) + \lambda(t - c)^2$ est deux fois dérivable sur $]a, b[$ car polynomiale, et f l'est par hypothèse. Par opérations sur les fonctions deux fois dérivables, ψ est deux fois dérivable sur $]a, b[$.

Calculons, pour tout $t \in]a, b[$:

$$\boxed{\psi'(t) = f'(t) - f'(c) - 2\lambda(t - c) \quad \text{et} \quad \psi''(t) = f''(t) - 2\lambda.}$$

(b) On résout l'équation d'inconnue λ suivante :

$$\psi(x) = \psi(c) \Leftrightarrow f(x) - f(c) - (x - c)f'(c) - \lambda(x - c)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow_{x \neq c} \lambda = \frac{1}{(x - c)^2} (f(x) - f(c) - (x - c)f'(c))$$

(c) On suppose avoir attribué à λ la valeur déterminée à la question précédente, de sorte que $\psi(x) = \psi(c)$. Puisque ψ est une fonction continue sur le segment délimité par x et c , dérivable sur l'intervalle ouvert délimité par x et c , on obtient par le théorème de Rolle l'existence d'un réel α strictement compris entre x et c , tel que $\psi'(\alpha) = 0$.

Puisque $\psi'(\alpha) = \psi'(c) = 0$, on peut à nouveau appliquer le théorème de Rolle entre α et c (ψ' étant bien continue et dérivable) : il existe un réel θ_x strictement compris entre α et c , et donc aussi entre x et c , tel que :

$$\psi''(\theta_x) = 0 = f''(\theta_x) - 2\lambda.$$

D'où :

$$\boxed{f(x) - f(c) - (x - c)f'(c) = \frac{(x - c)^2}{2} f''(\theta_x).}$$

Partie I - Dérivées successives de la fonction ζ

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln(n)}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur D en tant que composée de telles fonctions.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient par dérivation successive (quitte à rédiger une récurrence si besoin) :

$$\forall x \in D, \quad f_n^{(k)}(x) = (-1)^k \ln(n)^k e^{-x \ln(n)}.$$

5. Soient $x \in D$ et $k \in \mathbb{N}$. Considérons la série $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}$. Soit $\alpha \in]1, x[$. Alors :

$$n^\alpha \frac{(-\ln(n))^k}{n^x} = \frac{(-\ln(n))^k}{n^{x-\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par croissances comparées, en notant que $x - \alpha > 0$. De plus, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est à termes positifs et convergente en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha > 1$.

Par théorème de comparaison, la série $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}(x)$ est absolument convergente, donc convergente.

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est de classe \mathcal{C}^2 sur le segment $[x - |h|, x + |h|]$. Par le résultat préliminaire appliqué à f_n , il existe θ_h strictement compris entre x et $x + h$ tel que :

$$f_n(x + h) = f_n(x) + (x + h - x) \frac{-\ln(n)}{n^x} + \frac{(x + h - x)^2}{2} \frac{(\ln(n))^2}{n^{\theta_x}}$$

et donc :

$$\left| f_n(x + h) - f_n(x) + h \frac{\ln(n)}{n^x} \right| \leq \frac{h^2}{2} \frac{(\ln(n))^2}{n^{\theta_h}}$$

Enfin, $\theta_h \geq x - |h| \geq x - \frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{2}$, et par décroissance de f_n'' :

$$\left| f_n(x + h) - f_n(x) + h \frac{\ln(n)}{n^x} \right| \leq \frac{h^2}{2} \frac{(\ln(n))^2}{n^{\frac{x+1}{2}}}.$$

(b) Puisque $\frac{1+x}{2} \in D$, la série de terme général $\frac{(\ln(n))^2}{n^{\frac{x+1}{2}}} = f_n''(x)$ est convergente. Par théorème de comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $\left(f_n(x + h) - f_n(x) + h \frac{\ln(n)}{n^x} \right)$ est absolument convergente, et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| f_n(x + h) - f_n(x) + h \frac{\ln(n)}{n^x} \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n))^2}{n^{\frac{x+1}{2}}}.$$

D'autre part, par inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(f_n(x + h) - f_n(x) + h \frac{\ln(n)}{n^x} \right) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| f_n(x + h) - f_n(x) + h \frac{\ln(n)}{n^x} \right|$$

et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(f_n(x + h) - f_n(x) + h \frac{\ln(n)}{n^x} \right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x + h) - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) + h \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x} \\ &= \zeta(x + h) - \zeta(x) + h \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x} \end{aligned}$$

puisque tout converge ici. Ainsi :

$$\left| \zeta(x + h) - \zeta(x) + h \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x} \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n))^2}{n^{\frac{x+1}{2}}}.$$

(c) Pour h non nul dans $\left[-\frac{x-1}{2}, \frac{x-1}{2}\right]$:

$$\left| \frac{\zeta(x+h) - \zeta(x)}{h} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x} \right| \leq \frac{|h|}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n))^2}{n^{\frac{x+1}{2}}}.$$

Or, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n))^2}{n^{\frac{x+1}{2}}} = 0$. Par théorème des gendarmes :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\zeta(x+h) - \zeta(x)}{h} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}$$

existe et vaut 0. Ceci prouve que ζ est dérivable en x et :

$$\zeta'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\zeta(x+h) - \zeta(x)}{h} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x).$$

7. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que ζ est k fois dérivable sur D et que pour tout $x \in D$,

$$\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x).$$

I Le cas $k = 1$ a été démontré à la question précédente : ζ est dérivable en tout point de D , et donc sur D , et sa dérivée est donnée pour tout $x \in D$ par :

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x).$$

H Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang k , à savoir que ζ est k fois dérivable sur D et que pour tout $x \in D$:

$$\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x).$$

Reprenons les étapes vues aux questions précédentes avec la fonction $f_n^{(k)}$ à la place de f_n . Fixons $x \in D$. Pour $h \in \left[-\frac{x-1}{2}, \frac{x-1}{2}\right]$, la fonction $f_n^{(k)}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $[x - |h|, x + |h|]$. Il existe donc θ_h strictement compris entre x et $x + h$ tel que :

$$\left| f_n^{(k)}(x+h) - f_n^{(k)}(x) - h f_n^{(k+1)}(x) \right| \leq \frac{h^2 (\ln(n))^{k+2}}{2 n^{\theta_h}} \leq \frac{h^2 (\ln(n))^{k+2}}{2 n^{\frac{x+1}{2}}}$$

car $\theta_h \geq \frac{x+1}{2}$. Comme précédemment, la série de terme général $\frac{h^2 (\ln n)^{k+2}}{2 n^{\frac{1+x}{2}}}$ converge (prouvé à la question 5). Donc par inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x+h) - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x) - h \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k+1)}(x) \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^{k+2}}{n^{\frac{1+x}{2}}}$$

soit encore :

$$\left| \zeta^{(k)}(x+h) - \zeta^{(k)}(x) - h \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k+1)}(x) \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^{k+2}}{n^{\frac{1+x}{2}}}.$$

Et donc après division par $|h|$ et utilisation du théorème des gendarmes :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\zeta^{(k)}(x+h) - \zeta^{(k)}(x)}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k+1)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^{k+1}}{n^x}$$

Donc $\zeta^{(k)}$ est dérivable en x . Ceci étant vrai pour tout $x \in D$, $\zeta^{(k)}$ est dérivable sur D . Ainsi, ζ est $k+1$ fois dérivable, et sa dérivée d'ordre $k+1$ est bien celle annoncée.

Par le principe de récurrence, ζ est k fois dérivable sur D pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc de classe \mathcal{C}^∞ sur D , et pour tout $x \in D$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\ln n)^k}{n^x}.$$

Partie II - Comportement de ζ aux voisinages de 1 et $+\infty$

8. (a) Soit $x \geq 2$. Puisque $\zeta(x) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, et que la somme de cette série est évidemment positive, on obtient $\zeta(x) \geq 1$.

Soit également $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \geq N + 1$, $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^2}$ et donc (comme à la question 1)

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}. \text{ Ainsi :}$$

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

- (b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente, la suite de ses restes tend vers 0. Par conséquent, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour ce même N , et pour tout $n \in \llbracket 2, N \rrbracket$, $\frac{1}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Et donc par somme d'un nombre fini de limites :

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Il existe donc $A > 0$ tel que pour tout $x > A$:

$$0 \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $x \geq A$:

$$1 \leq \zeta(x) \leq 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon, \quad \text{et donc} \quad |\zeta(x) - 1| \leq \varepsilon.$$

C'est précisément la définition de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$.

9. On déduit de la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ sur $[1, +\infty[$ les inégalités suivantes, pour tous $n \geq 1$ et $t \in [n, n+1]$:

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}.$$

D'où pour tout $n \geq 2$, $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}$.

Soient $N \geq 2$ et $p > N$. Par sommation des inégalités précédemment obtenues pour n allant de N à p :

$$\int_N^{p+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=N}^p \frac{1}{n^x} \leq \int_{N-1}^p \frac{dt}{t^x}$$

Or :

$$\int_N^{p+1} \frac{dt}{t^x} = \left[\frac{t^{1-x}}{1-x} \right]_N^{p+1} = \frac{N^{1-x}}{x-1} - \frac{(p+1)^{1-x}}{x-1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{N^{1-x}}{x-1}$$

et de même :

$$\int_{N-1}^p \frac{dt}{t^x} = \frac{(N-1)^{1-x}}{x-1} - \frac{(p+1)^{1-x}}{x-1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{(N-1)^{1-x}}{x-1}.$$

Par passage à la limite lorsque $p \rightarrow +\infty$ dans l'encadrement précédemment obtenu (dont tous les termes convergent) :

$$\frac{N^{1-x}}{x-1} \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{(N-1)^{1-x}}{x-1}.$$

10. Pour $N = 3$, on obtient en particulier :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{2^{1-x}}{x-1} \leq \frac{2}{(x-1)2^x}.$$

Mais $\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, de sorte que :

$$0 \leq \zeta(x) - 1 - \frac{1}{2^x} \leq \frac{2}{(x-1)2^x}.$$

Puisque $\frac{2}{(x-1)2^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^x}\right)$, on obtient $\zeta(x) - 1 - \frac{1}{2^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^x}\right)$, et donc :

$$\zeta(x) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right) \quad \boxed{\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}}.$$

11. Reprenons l'encadrement de la question 9, cette fois avec $N = 2$:

$$1 + \frac{2^{1-x}}{x-1} \leq 1 + \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1}, \quad \text{d'où} \quad 2^{1-x} \leq (x-1)\zeta(x) \leq 1 - (x-1).$$

Par théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)\zeta(x)$ existe et vaut 1, ce qui se récrit $\boxed{\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}}$.

En particulier, on en déduit la limite $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty}$.

Remarque. La plupart des résultats obtenus dans ce problème s'obtiendront bien plus facilement l'an prochain à l'aide de résultats puissants sur les séries de fonctions, qui permettront, sous certaines hypothèses, de permuter dérivation et somme infinie, ou encore limite (quand $x \rightarrow 1$ ou $x \rightarrow +\infty$ ici) et somme infinie.

Exercice 3 (Endomorphismes cycliques)

Partie I - Exemples

1. (a) Soient $v = (x_1, y_1, z_1)$, $w = (x_2, y_2, z_2)$ dans \mathbb{R}^3 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculons :

$$\lambda v + w = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)$$

et :

$$\begin{aligned} u(\lambda v + w) &= (6(\lambda z_1 + z_2), (\lambda x_1 + x_2) - 11(\lambda z_1 + z_2), (\lambda y_1 + y_2) + 6(\lambda z_1 + z_2)) \\ &= \lambda(6z_1, x_1 - 11z_1, y_1 + 6z_1) + (6z_2, x_2 - 11z_2, y_2 + 6z_2) \\ &= \lambda u(v) + u(w) \end{aligned}$$

Donc u est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .

- (b) Calculons :

$$u(1, 0, 0) = (0, 1, 0), \quad u^2(1, 0, 0) = u(0, 1, 0) = (0, 0, 1).$$

Les vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ appartiennent à $E_u((1, 0, 0))$. Comme $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 (c'est la base canonique), $E_u((1, 0, 0)) = \mathbb{R}^3$ et u est un endomorphisme cyclique.

- (c) Par les calculs précédents, $\mathcal{B}((1, 0, 0), 3)$ n'est autre que la base canonique de \mathbb{R}^3 . Nous avons obtenu $u(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$ et $u(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$, et de plus $u(0, 0, 1) = (6, -11, 6)$. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}((1, 0, 0), 3)$ est donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Soit $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0_E$ (qui existe bien car $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$). Montrons que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ est libre. Soient pour cela $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 u(x_0) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0_E.$$

En appliquant u^{p-1} à cette égalité, on obtient par linéarité :

$$\lambda_0 u^{p-1}(x_0) + \underbrace{\lambda_1 u^p(x_0) + \dots + \lambda_{p-1} u^{2p-2}(x_0)}_{=0_E} = 0_E.$$

D'où $\lambda_0 = 0$ puisque $u^{p-1}(x_0) \neq 0_E$. Reste alors l'égalité :

$$\lambda_1 u(x_0) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0_E.$$

En appliquant u^{p-2} , on obtient de même $\lambda_1 = 0$. Et ainsi de suite, $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

La famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ est donc libre. Par conséquent, son cardinal est inférieur ou égal à la dimension de E , soit $p \leq n$.

- (b) On procède par double implication.

\Rightarrow Supposons que u soit cyclique : il existe $x_0 \in E$ tel que :

$$E = \text{Vect}(u^k(x_0), k \in \mathbb{N}) = \text{Vect}(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0)).$$

La famille $(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ est donc génératrice de E . Par conséquent, son cardinal p est supérieur à la dimension n de E . Comme de plus $p \leq n$, on obtient

$$p = n.$$

⊞ Supposons que $p = n$. On a montré l'existence d'un vecteur x_0 tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une famille libre. Comme elle est de cardinal n , c'est donc une base de E , de sorte que :

$$\boxed{\text{Vect}}(u^k(x_0), k \in \mathbb{N}) = \text{Vect}(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)) = E$$

et donc $\boxed{u \text{ est un endomorphisme cyclique.}}$

Ainsi, un endomorphisme nilpotent u de E est cyclique si, et seulement si, son indice de nilpotence est $n = \dim(E)$.

(c) Pour tout $k \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$, $u(u^k(x_0)) = u^{k+1}(x_0)$ et $u(u^{p-1}(x_0)) = 0_E$. Par conséquent, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}(x_0, n)$ de E est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de u est une matrice de Frobenius. Par lecture matricielle, on remarque que $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$, et plus généralement :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad u(e_k) = e_{k+1}.$$

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $u^k(e_1) = e_{k+1}$, de sorte que $E_u(e_1)$ contient tous les vecteurs de la base \mathcal{B} . Puisque celle-ci engendre E , $E_u(e_1)$ est donc égal à E , et $\boxed{u \text{ est cyclique.}}$

Partie II - Étude des sous-espaces $E_u(e)$

4. La famille $\mathcal{B}(e, n+1) = (e, u(e), u^2(e), \dots, u^{n+1-1}(e))$ étant de cardinal $n+1 > \dim(E)$, $\boxed{\text{elle est liée.}}$

5. Comme $\dim(E) = n$, le cardinal maximal d'une famille libre de E est n . De plus, $(e) = \mathcal{B}(e, 1)$ est libre en tant que famille formée d'un vecteur non nul. L'ensemble d'entiers :

$$\{k \in \mathbb{N}^* \mid \mathcal{B}(e, k) \text{ est libre}\}$$

est donc non vide (il contient 1) et majoré par n : il a un maximum. Donc $\boxed{d(e) \text{ existe bien.}}$

6. (a) Par définition de $d(e)$, la famille $\mathcal{B}(e, d(e)+1) = (e, u(e), u^2(e), \dots, u^{d(e)}(e))$ est liée : il existe $(b_0, \dots, b_{d(e)}) \neq (0, \dots, 0)$ tel que :

$$b_0 e + b_1 u(e) + \cdots + b_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e) + b_{d(e)} u^{d(e)}(e) = 0_E.$$

Supposons $b_{d(e)} = 0$. Alors :

$$b_0 e + b_1 u(e) + \cdots + b_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e) = 0_E$$

et par liberté de la famille $(e, u(e), u^2(e), \dots, u^{d(e)-1}(e))$, $(b_0, \dots, b_{d(e)-1})$ serait nul, ce qui est impossible car $(b_0, \dots, b_{d(e)}) \neq (0, \dots, 0)$. Ainsi, $b_{d(e)} \neq 0$, et quitte à diviser par $b_{d(e)}$:

$$u^{d(e)}(e) = -\frac{1}{b_{d(e)}} (b_0 e + b_1 u(e) + \cdots + b_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e)),$$

et $u^{d(e)}(e)$ est combinaison linéaire des vecteurs $e, u(e), \dots, u^{d(e)-1}(e)$.

Ainsi, il existe des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{d(e)-1}$ tels que $u^{d(e)}(e) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e)$.

(b) Montrons par récurrence que pour tout $k \geq d(e)$, $u^k(e)$ appartient à $\text{Vect}(e, u(e), \dots, u^{d(e)-1}(e))$.

I Nous avons prouvé la propriété au rang $k = d(e)$ à la question précédente.

H Soit $k \geq d(e)$. Supposons qu'il existe des scalaires $a_0, \dots, a_{d(e)-1}$ tels que $u^k(e) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e)$. Alors :

$$u^{k+1}(e) = u(u^k(e)) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^{i+1}(e) = \sum_{j=0}^{d(e)-1} a_{j-1} u^j(e) + a_{d(e)-1} u^{d(e)}(u).$$

Et comme $u^{d(e)}(u)$ est lui-même combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}(e, d(e))$, c'est également le cas pour $u^{k+1}(e)$.

Par principe de récurrence, $u^k(e)$ appartient à $\text{Vect}(e, u(e), u^2(e), \dots, u^{d(e)-1}(e))$ pour tout $k \geq d(e)$.

(c) Par la question précédente :

$$E_u(e) = \text{Vect}(u^k(e), k \in \mathbb{N}) \subset \text{Vect}(u^k(e), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket).$$

L'inclusion réciproque étant immédiate, la famille $\mathcal{B}(e, d(e))$ est génératrice de $E_u(e)$, et libre par définition de $d(e)$. Donc $\mathcal{B}(e, d(e))$ est une base de $E_u(e)$.

7. Procédons par double implication.

\Rightarrow Supposons u est cyclique : il existe $e \in E$ tel que $E_u(e) = E$. Par égalité des dimensions :

$$\text{d}(e) = \dim(E_u(e)) = \dim(E) = n.$$

\Leftarrow Supposons qu'il existe un vecteur non nul e de E tel que $d(e) = n$. Par la question précédente, $\mathcal{B}(e, d(e)) = \mathcal{B}(e, n)$ est une base de $E_u(e)$. Ainsi :

$$\dim(E_u(e)) = \text{Card}(\mathcal{B}(e, n)) = n$$

Comme $E_u(e)$ est un sous-espace vectoriel de E qui est aussi de dimension n , alors $E_u(e) = E$ et u est un endomorphisme cyclique.

Ainsi, u est cyclique si, et seulement si, il existe un vecteur non nul e de E tel que $d(e) = n$.

Partie III - Endomorphismes cycliques et matrices de Frobenius

8. Rappelons que $\mathcal{B}(e, n) = (e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $u(u^k(e)) = u^{k+1}(e)$. D'autre part, $u(u^{n-1}(e)) = u^n(e)$ appartient à E , et se décompose dans la base $\mathcal{B}(e, n)$:

$$u^n(e) = a_0 e + a_1 u(e) + \dots + a_{n-1} u^{n-1}(e)$$

où $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. On peut à présent écrire la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}(e, n)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On reconnaît ici la matrice de Frobenius associée au polynôme $P_A = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0$.

9. (a) Tout d'abord :

$$P_A(u)(e) = u^n(e) - a_{n-1}u^{n-1}(e) - \dots - a_1u(e) - a_0e = 0_E$$

par définition des scalaires $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$.

Dès lors, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$P_A(u)(u^k(e)) = u^{n+k}(e) - a_{n+k-1}u^{n-1}(e) - \dots - a_1u^{k+1}(e) - a_0u^k(e) = u^k(0_E) \boxed{= 0_E}.$$

(b) L'endomorphisme $P_A(u)$ s'annule sur les vecteurs $u^k(e)$ pour tous $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, qui forment une base $\mathcal{B}(e, n)$ de E . C'est donc l'endomorphisme nul.

10. Considérons $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ une famille de scalaires telle que :

$$\alpha_0 \text{id}_E + \alpha_1 u + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Pour tout x dans E :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x) = 0_E.$$

En particulier pour $x = e$:

$$\alpha_0 e + \alpha_1 u(e) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(e) = 0_E.$$

Par liberté de la famille $\mathcal{B}(e, n)$, $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

Ainsi, la famille $(\text{id}_E, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

11. On a déjà établi que P_A est un polynôme annulateur de u , non nul car de degré $n \geq 2$.

Supposons qu'il existe $Q = b_0 + b_1 X + \dots + b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ de degré $k \leq n-1$ et annulateur de u . Alors :

$$b_0 \text{id}_E + b_1 u + \dots + b_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Par liberté de la famille $(\text{id}_E, u, u^2, \dots, u^{n-1})$, $b_0 = b_1 = \dots = b_k = 0$ et Q est le polynôme nul.

Ainsi, P_A est un polynôme annulateur non nul de u de degré minimal.

12. Puisque $M_{\mathcal{B}}(f - \lambda \text{id}_E) = M_{\mathcal{B}}(f) - \lambda I_n$, on a donc $\text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) = \text{rg}(M_{\mathcal{B}}(f) - \lambda I_n)$. Échelonnons donc cette dernière matrice à l'aide d'opérations sur les lignes :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & & & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ -\lambda & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & -\lambda & & & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 + \lambda a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & & & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & & & 0 & a_2 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 + \lambda a_1 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \lambda^2 L_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & & & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -\lambda^3 & \dots & \dots & 0 & a_0 + \lambda a_1 + \lambda^2 a_2 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De proche en proche, en répétant les opérations $L_i \leftrightarrow L_{i+1}$ et $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} + \lambda^i L_i$ pour $1 \leq i \leq n - 2$, on se ramène à :

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & & & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & -\lambda^{n-1} & a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \\
 L_{n-1} \overset{\sim}{\leftrightarrow} L_n & \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & & & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & a_{n-1} - \lambda \\ \vdots & & \ddots & & -\lambda^{n-1} & a_0 + \cdots + a_{n-2}\lambda^{n-2} \end{pmatrix} \\
 L_n \overset{\sim}{\leftarrow} L_n + \lambda^{n-1} L_{n-1} & \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & & & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & a_{n-1} - \lambda \\ \vdots & & \ddots & & 0 & a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} - \lambda^n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Cette dernière matrice est échelonnée, possède des pivots égaux à 1 sur les $n - 1$ premières lignes, et un $-P(\lambda)$ en dernière position. Deux cas se présentent alors :

- si λ est racine de P , alors la dernière ligne est nulle et la matrice est de rang $n - 1$. Dans ce cas, $\boxed{\text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) = n - 1}$;
- si λ n'est pas racine de P , la matrice est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls : elle est inversible, et donc de rang n . Dans ce cas, $\boxed{\text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) = n}$.

13. (a) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque λ_i est racine de P_A , $u - \lambda_i \text{id}_E$ est de rang $n - 1$ par la question précédente.

Par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)) = 1$, et il existe un vecteur non nul e_i dans $\text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)$, qui satisfait donc $\boxed{u(e_i) = \lambda_i e_i}$.

(b) Montrons que la famille \mathcal{B} est libre. Pour cela, on va montrer par récurrence finie que (e_1, \dots, e_k) est libre pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

I Pour $k = 1$, (e_1) est libre car c'est une famille formée d'un unique vecteur non nul.

H Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Supposons la propriété établie au rang k .

Montrons que la famille (e_1, \dots, e_{k+1}) est libre. Soient pour cela $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$ des scalaires tels que :

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_{k+1} e_{k+1} = 0_E. \quad (E_0)$$

En appliquant u à cette égalité, on obtient (par linéarité de u) :

$$\alpha_1 \lambda_1 e_1 + \cdots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} e_{k+1} = 0_E. \quad (E_1)$$

En effectuant l'opération $(E_1) - \lambda_{k+1}(E_0)$, on obtient :

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})e_1 + \cdots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})e_k = 0_E.$$

Par hypothèse de récurrence, (e_1, \dots, e_k) est libre, de sorte que :

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = \dots = \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0.$$

Puisque les λ_i sont deux à deux distincts, on obtient bien $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, et en reportant dans (E_0) , en notant que $e_{k+1} \neq 0_E$, $\alpha_{k+1} = 0$.

D'où la propriété au rang $k + 1$.

Par principe de récurrence, (e_1, \dots, e_k) est libre dans E pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En particulier, \mathcal{B} est libre, de cardinal $n = \dim(E)$. C'est donc une base de E .

Par définition, $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La matrice de u dans la base \mathcal{B} est donc diagonale, égale à :

$$\boxed{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}.$$

Partie IV - Endomorphismes diagonalisables et endomorphismes cycliques

14. Notons $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p) \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

$$P(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)) = \text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_p)) = 0_n.$$

Mais cette matrice n'est autre que celle de l'endomorphisme $P(u)$ dans la base \mathcal{B} . Ainsi, $P(u) = (u - \lambda_1 \text{id}_E) \circ (u - \lambda_2 \text{id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_p \text{id}_E)$ est l'endomorphisme nul.

15. Le polynôme P précédemment introduit est non nul, unitaire de degré $p \geq 1$. Notons-le $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{p-1} X^{p-1} + X^p$. Alors :

$$0_{\mathcal{L}(E)} = P(u) = \alpha_0 \text{id}_E + \alpha_1 u + \dots + \alpha_{p-1} u^{p-1} + u^p.$$

Donc la famille $(\text{id}_E, u, u^2, \dots, u^p)$ est liée dans $\mathcal{L}(E)$.

16. Si u est cyclique, on a établi que la famille $(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$. Il est donc nécessaire que $p = n$ si u est cyclique.

17. (a) Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$u^k(e) = u^k(e_1) + \dots + u^k(e_n) = \lambda_1^k e_1 + \dots + \lambda_n^k e_n.$$

Ainsi :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

(b) On reconnaît ici une matrice de Vandermonde. Puisque les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts, M est inversible. Par conséquent, $\mathcal{B}(e, n)$ est une base, et u est cyclique.

Partie V - Étude du commutant d'un endomorphisme cyclique

18. L'ensemble $\mathcal{C}(u) \subset \mathcal{L}(E)$ est non vide car l'endomorphisme nul commute bien avec u .

Soient $f, g \in \mathcal{C}(u)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$u \circ (\lambda f + g) = \lambda u \circ f + u \circ g \underset{f, g \in \mathcal{C}(u)}{=} \lambda f \circ u + g \circ u = (\lambda f + g) \circ u.$$

Ainsi, $\lambda f + g$ appartient à $\mathcal{C}(u)$. Donc $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

19. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, u^k appartient à $\mathcal{C}(u)$. Comme de plus $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, les combinaisons linéaires de tels vecteurs sont aussi dans $\mathcal{C}(u)$. Ainsi, $P(u)$ appartient à $\mathcal{C}(u)$ pour tout polynôme P . D'où l'inclusion $\boxed{\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{C}(u)}$

20. (a) Soient v et w dans $\mathcal{C}(u)$ tels que $v(e) = w(e)$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$v(u^k(e)) = v \circ u^k(e) \underset{v \in \mathcal{C}(u)}{=} u^k \circ v(e) = u^k \circ w(e) \underset{w \in \mathcal{C}(u)}{=} w(u^k(e)).$$

Ainsi v et w coïncident sur la base $\mathcal{B}(e, n)$. $\boxed{\text{Elles sont donc égales.}}$

(b) Comme $\mathcal{B}(e, n)$ est génératrice de E , il existe $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\boxed{v(e) = a_{n-1}u^{n-1}(e) + \dots + a_1u(e) + a_0e.}$$

Posons $w = a_{n-1}u^{n-1} + \dots + a_1u + a_0\text{id}_E$. L'endomorphisme w appartient $\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{C}(u)$, et est tel que $v(e) = w(e)$. Par la question précédente, il suit que $\boxed{v = w.}$

21. On vient d'établir que si $v \in \mathcal{C}(u)$, alors v appartient à $\mathbb{K}[u]$. Comme l'inclusion réciproque a également été montrée, on obtient $\boxed{\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u].}$

Plus précisément, montrons que :

$$\mathcal{C}(u) = \text{Vect}(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1}).$$

Soit v un élément de $\mathbb{K}[u]$: il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v = P(u)$. Effectuons la division euclidienne de P par P_A (où P_A désigne le polynôme caractéristique de la matrice de u dans la base $\mathcal{B}(e, n)$) :

$$\begin{cases} P = QP_A + R \\ \deg(R) < n \end{cases} .$$

D'où :

$$P(u) = Q(u) \circ \underbrace{P_A(u)}_{=0_{\mathcal{L}(E)}} + R(u).$$

Par conséquent, $P(u) = R(u)$ qui appartient bien à $\text{Vect}(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ puisque $\deg(R) < n$.

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u] = \text{Vect}(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1}).}$$

Enfin, puisque u est cyclique, la famille $(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre. C'est donc une base de $\mathcal{C}(u)$, et $\dim(\mathcal{C}(u)) = n$.

Remarque. On peut en fait montrer les équivalences suivantes, pour $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$u \text{ est cyclique} \Leftrightarrow \mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u] \Leftrightarrow \dim(\mathcal{C}(u)) = n.$$

La preuve de ces équivalences pourra être vue en deuxième année.