

Concours blanc 1 du 13/05/2026

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1 (Probabilités)

On effectue une suite de tirages dans une urne contenant initialement une boule blanche et une boule rouge. À l'issue de chaque tirage, on remet dans l'urne la boule que l'on vient de tirer et on rajoute une boule blanche, si bien que lors du $n^{\text{ème}}$ tirage, l'urne contient une boule rouge et n boules blanches.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- A_n l'événement : « lors des n premiers tirages, on n'a jamais obtenu deux fois consécutivement la boule rouge » ;
- B_n l'événement « on a obtenu une boule blanche lors du $n^{\text{ème}}$ tirage » et $R_n = \overline{B_n}$;
- $p_n = P(A_n \cap B_n)$ et $q_n = P(A_n)$.

On étudie dans cet exercice les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1. Calculer p_1 , q_1 et p_2 , q_2 .
2. Justifier que pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n+1} \leq q_n \leq \frac{5}{6}$.
3. Soit $n \geq 2$. Comparer les événements $A_n \cap B_n$ et $A_{n-1} \cap B_n$.
4. En déduire que pour tout $n \geq 2$, $p_n = q_{n-1} \frac{n}{n+1}$.
5. Prouver que pour tout $n \geq 2$, $q_n = p_n + \frac{1}{n+1} p_{n-1}$.
6. Montrer alors que pour tout $n \geq 2$, $p_{n+1} - p_n = -\frac{1}{n+2} (p_n - p_{n-1})$.
7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!}$.
8. Montrer que la suite $(q_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel que l'on précisera.

Exercice 2 (Fonction zêta de Riemann)

1. Rappeler pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la série de terme général $\frac{1}{n^x}$ converge. On note D l'ensemble de ces valeurs.

Dans toute la suite, pour $x \in D$, on note $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, de sorte qu'on définit une fonction $\zeta : D \rightarrow \mathbb{R}$.

2. Prouver que ζ est strictement monotone sur D .

Partie 0 - Un résultat préliminaire

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un segment $[a, b]$, et soit $c \in]a, b[$.

3. Soit $x \in]a, b[$ fixé différent de c . Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit une fonction ψ sur $[a, b]$ par :

$$\psi : t \mapsto f(t) - f(c) - (t - c)f'(c) - \lambda(t - c)^2$$

- (a) Justifier que ψ est deux fois dérivable sur $]a, b[$, et pour $t \in]a, b[$, calculer $\psi'(t)$ et $\psi''(t)$.
- (b) Déterminer la valeur à donner à λ pour que $\psi(x) = \psi(c)$.
- (c) En appliquant deux fois le théorème de Rolle, justifier qu'il existe θ_x compris strictement entre c et x tel que :

$$f(x) = f(c) + (x - c)f'(c) + \frac{(x - c)^2}{2} f''(\theta_x).$$

Partie I - Dérivées successives de la fonction ζ

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : \begin{matrix} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{n^x} \end{matrix}$, de sorte que pour $x \in D$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe \mathcal{C}^∞ sur D , et pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $f_n^{(k)}$.
5. Montrer que pour tout $x \in D$ et tout $k \in \mathbb{N}$, la série de terme général $f_n^{(k)}(x)$ converge.
6. Soit $x \in D$, et soit $h \in \left[-\frac{x-1}{2}, \frac{x-1}{2}\right]$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| f_n(x+h) - f_n(x) + h \frac{\ln n}{n^x} \right| \leq \frac{h^2 (\ln n)^2}{2 n^{\frac{x+1}{2}}}.$$

(b) En déduire que :

$$\left| \zeta(x+h) - \zeta(x) + h \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{\frac{x+1}{2}}}.$$

(c) Prouver alors que ζ est dérivable en x , et que $\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$.

7. Prouver que ζ est de classe \mathcal{C}^∞ sur D , et que pour tout $x \in D$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\ln n)^k}{n^x}.$$

Partie II - Comportement de ζ aux voisinages de 1 et $+\infty$

8. (a) Montrer que pour tout $x \geq 2$ et tout $N \geq 1$: $1 \leq \zeta(x) \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

(b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$.

9. À l'aide d'une comparaison à une intégrale, montrer que pour tous $N \geq 2$ et $x > 1$:

$$\frac{N^{1-x}}{x-1} \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{(N-1)^{1-x}}{x-1}.$$

10. En déduire que pour tout $x \in D$:

$$0 \leq \zeta(x) - 1 - \frac{1}{2^x} \leq \frac{2}{(x-1)2^x},$$

puis déterminer un équivalent simple de $\zeta(x) - 1$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

11. À l'aide de la question 9, prouver que $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x)$.

Exercice 3 (Endomorphismes cycliques)

Ce problème étudie quelques propriétés des endomorphismes cycliques d'un espace vectoriel E de dimension finie. Dans tout le problème :

- E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n avec $n \geq 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} ;
- si u est un endomorphisme de E , on définit les puissances de u par récurrence : $u^0 = \text{id}_E$ et pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on pose $u^k = u \circ u^{k-1}$;

si $Q(X) = q_0 + q_1X + \dots + q_mX^m \in \mathbb{K}[X]$, on pose pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$Q(u) = q_0 \text{id}_E + q_1 u + \dots + q_m u^m \in \mathcal{L}(E)$$

et on note $\mathbb{K}[u] = \{Q(u), Q \in \mathbb{K}[X]\}$;

- si u est un endomorphisme de E et e un vecteur de E , on note $E_u(e)$ le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$E_u(e) = \text{Vect}(u^k(e), k \in \mathbb{N});$$

si k est un entier naturel non nul, $\mathcal{B}(e, k)$ désigne la famille $(e, u(e), u^2(e), \dots, u^{k-1}(e))$;

- on dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est un *endomorphisme cyclique* s'il existe $e \in E$ tel que $E = E_u(e)$;
- on dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *matrice de Frobenius* ou une *matrice compagnon* s'il existe des scalaires a_0, a_1, \dots, a_{n-1} tels que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Le polynôme $P_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0$ est appelé *polynôme caractéristique* de A .

Partie I - Exemples

1. Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}^3$. Considérons l'application suivante de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 :

$$u(x, y, z) = (6z, x - 11z, y + 6z).$$

- (a) Montrer que u est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
 - (b) Calculer $u(1, 0, 0)$ et $u^2(1, 0, 0)$. En déduire que u est un endomorphisme cyclique.
 - (c) Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}((1, 0, 0), 3)$ de \mathbb{R}^3 .
2. Dans cette question, E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme nilpotent de E d'indice $p \geq 2$, satisfaisant donc $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 - (a) Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ soit libre. Que peut-on en déduire sur p ?
 - (b) En déduire que u est cyclique si, et seulement si, $p = n$.
 - (c) Dans le cas où $p = n$, écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}(x_0, n)$ de E .
 3. Dans cette question, E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de u est une matrice de Frobenius. Montrer que u est cyclique.

Partie II - Étude des sous-espaces $E_u(e)$

Soit u un endomorphisme de E et e un vecteur non nul de E .

4. Justifier que la famille $\mathcal{B}(e, n+1)$ est liée.
5. On note $d(e) = \max\{k \in \mathbb{N}^* \mid \mathcal{B}(e, k) \text{ est libre}\}$. Justifier l'existence de $d(e)$.
6. (a) Montrer qu'il existe des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{d(e)-1}$ tels que :

$$u^{d(e)}(e) = a_0e + a_1u(e) + a_2u^2(e) + \dots + a_{d(e)-1}u^{d(e)-1}(e) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e).$$

- (b) Montrer alors que pour tout entier k supérieur ou égal à $d(e)$, le vecteur $u^k(e)$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $(e, u(e), u^2(e), \dots, u^{d(e)-1}(e))$.
 - (c) En déduire que $\mathcal{B}(e, d(e))$ est une base de $E_u(e)$.
7. Montrer que u est un endomorphisme cyclique si, et seulement si, il existe un vecteur non nul e de E tel que $d(e) = n$.

Partie III - Endomorphismes cycliques et matrices de Frobenius

On suppose dans cette partie que u est un endomorphisme cyclique de E et donc qu'il existe un vecteur non nul e de E tel que $E = E_u(e)$.

8. On note A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}(e, n)$ de E . Vérifier que A est une matrice de Frobenius.
9. On note $P_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0$ le polynôme caractéristique de A .
 - (a) Déterminer l'image par l'endomorphisme $P_A(u)$ des vecteurs de la base $\mathcal{B}(e, n)$.
 - (b) En déduire que $P_A(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On dit que P_A est un polynôme annulateur de u .
10. Vérifier que la famille $(\text{id}_E, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.
11. En déduire que P_A est un polynôme annulateur non nul de u de degré minimal.
12. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\text{rg}(u - \lambda \text{id}_E) = \begin{cases} n & \text{si } \lambda \text{ n'est pas racine de } P_A \\ n - 1 & \text{si } \lambda \text{ est racine de } P_A \end{cases}.$$

13. On suppose que P_A admet n racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
 - (a) Montrer l'existence d'une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad u(e_i) = \lambda_i e_i.$$
 - (b) Montrer que la famille \mathcal{B} est une base de E . Écrire la matrice de u dans cette base.

Partie IV - Endomorphismes diagonalisables et endomorphismes cycliques

Dans cette partie, on considère un endomorphisme u de E et on suppose qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale, égale à :

$$\text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1 \text{ termes}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{m_2 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_p \text{ termes}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

où $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ sont des scalaires distincts deux à deux (avec $p \leq n$) et $(m_1, \dots, m_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$.

14. Établir que $(u - \lambda_1 \text{id}_E) \circ (u - \lambda_2 \text{id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_p \text{id}_E)$ est l'endomorphisme nul.
15. En déduire que la famille $(\text{id}_E, u, u^2, \dots, u^p)$ est liée dans $\mathcal{L}(E)$.
16. Quelle est la valeur de p si u est cyclique ?
17. On suppose que $p = n$, et on pose $e = \sum_{i=1}^n e_i$.

- (a) Écrire la matrice $M = M_{\mathcal{B}}(e, f(e), \dots, f^{n-1}(e))$.
- (b) Conclure que u est cyclique.

Partie V - Étude du commutant d'un endomorphisme cyclique

Dans cette partie, u désigne un endomorphisme cyclique de l'espace vectoriel E . On fixe $e \in E$ tel que $E = E_u(e)$. On rappelle qu'alors, la famille $\mathcal{B}(e, n) = (e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$ est une base de E .

On appelle *commutant de u* , et on note $\mathcal{C}(u)$, le sous-ensemble de $\mathcal{L}(E)$ suivant :

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}.$$

18. Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
19. Montrer que $\mathbb{K}[u]$ est inclus dans $\mathcal{C}(u)$.
20. (a) Soient deux endomorphismes v et w de $\mathcal{C}(u)$. Montrer que, si $v(e) = w(e)$, alors $v = w$.
- (b) Soit $v \in \mathcal{C}(u)$. Justifier l'existence de $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$v(e) = b_{n-1}u^{n-1}(e) + \dots + b_1u(e) + b_0e.$$

Montrer que $v = b_{n-1}u^{n-1} + \dots + b_1u + b_0\text{id}_E$.

21. Décrire $\mathcal{C}(u)$, puis déterminer sa dimension.