DS9

Correction du concours blanc 2

Exercice 1 (Probabilités)

1. Remarquons que A_1 est l'événement certain Ω (on ne peut avoir deux boules rouges consécutives en un seul tirage), de sorte que $A_1 \cap B_1 = B_1$. Ainsi :

$$p_1 = P(A_1 \cap B_1) = p(B_1) \boxed{= \frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad q_1 = P(A_1) \boxed{= 1.}$$

De même, on remarque que $A_2 \cap B_2 = B_2$ puisque $B_2 \subset A_2$, et $A_2 = \overline{R_1 \cap R_2}$, de sorte que :

$$p_2 = P(A_2 \cap B_2) = P(B_2) \boxed{= \frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad q_2 = P(A_2) = 1 - P(R_1 \cap R_2) = 1 - P(R_1)P(R_2) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{3} \boxed{= \frac{5}{6}}$$

en notant que les événements R_1 et R_2 sont indépendants, le premier tirage n'influant pas sur la composition de l'urne et ce qu'il advient au deuxième tirage.

2. Remarquons que pour tout $n \geq 2$, $A_{n+1} \subset A_n$. En particulier, $A_n \subset A_2$, d'où par croissance de la probabilité :

$$q_n = P(A_n) \leq P(A_2) = \frac{5}{6}.$$

D'autre part, A_n contient l'événement $B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$. Par croissance de la probabilité et indépendance des événements $B_1, \ldots, B_n$:

$$q_n = P(A_n) \geq P(B_1 \cap \ldots B_n) = P(B_1) \times P(B_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $\boxed{\frac{1}{n+1} \leq q_n \leq \frac{5}{6}.}$

3. Soit $n \geq 2$. Comme remarqué plus haut, $A_n \subset A_{n-1}$, de sorte que $A_n \cap B_n \subset A_{n-1} \cap B_n$.

Mais on peut dire davantage. En effet, si $A_{n-1} \cap B_n$ est réalisé, c'est qu'on n'a pas obtenu deux boules rouges consécutives lors des $n-1$ premiers tirages et qu'on a obtenu une boule blanche au n-ème tirage. Dans ce cas, on n'a pas non plus obtenu deux boules rouges consécutives lors des n premiers tirages. Ainsi, $A_{n-1} \cap B_n$ est contenu dans $A_n \cap B_n$.

Par double inclusion, $\boxed{A_n \cap B_n = A_{n-1} \cap B_n.}$

4. Soit $n \geq 2$. Par la question précédente, $A_n \cap B_n = A_{n-1} \cap B_n$. Et les événements A_{n-1} et B_n sont indépendants, la composition de l'urne au n-ème tirage étant la même quelque soit les résultats obtenus aux $n-1$ premiers tirages. Ainsi :

$$p_n = P(A_n \cap B_n) = P(A_{n-1} \cap B_n) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} P(A_{n-1})P(B_n) \boxed{= q_{n-1} \times \frac{n}{n+1}.}$$

5. Soit $n \geq 2$. La formule attendue faisant notamment intervenir les événements A_n et $A_n \cap B_n$, on est naturellement amené à décomposer A_n dans le système complet d'événements $\{B_n, \overline{B_n}\}$:

$$A_n = (A_n \cap B_n) \sqcup (A_n \cap \overline{B_n}).$$

Par incompatibilité :

$$q_n = P(A_n \cap B_n) + P(A_n \cap \overline{B_n}) = p_n + P(A_n \cap \overline{B_n}).$$

Mais $A_n \cap \overline{B_n} = A_n \cap R_n = A_{n-2} \cap B_{n-1} \cap R_n$ car A_n se réalise avec l'obtention d'une boule rouge au n-ème tirage si, et seulement si, on n'a pas obtenu deux boules rouges consécutives lors des $n-2$ premiers tirages et on a obtenu une boule blanche puis une boule rouge lors des tirages $(n-1)$ et n. Ainsi, en utilisant une nouvelle fois l'indépendance des tirages :

$$P(A_n \cap \overline{B_n}) = P(A_{n-2} \cap B_{n-1} \cap R_n) = P(A_{n-2} \cap B_{n-1})P(R_n) = p_{n-1}\frac{1}{n+1}.$$

D'où l'égalité voulue :

$$\boxed{q_n = p_n + \frac{1}{n+1}p_{n-1}.}$$

6. Soit $n \geq 2$. En multipliant l'égalité précédente par $\dfrac{n+1}{n+2}$, on obtient avec le résultat de la question 4 :

$$p_{n+1} = q_n \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}p_n + \frac{1}{n+2}p_{n-1} = p_n - \frac{1}{n+2}p_n + \frac{1}{n+2}p_{n-1}.$$

Et donc :

$$\boxed{p_{n+1} - p_n = -\frac{1}{n+2}\left(p_n - p_{n-1}\right).}$$

7. En itérant la formule récursive obtenue à la question précédente, on obtient pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= -\frac{1}{n+2}\left(p_n - p_{n-1}\right) = \frac{(-1)^2}{(n+2)(n+1)}(p_{n-1} - p_{n-2}) \\ &= \cdots = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)(n+1)\cdots 4}(p_2 - p_1). \end{aligned}$$

Par les calculs effectués, $p_1 = \frac{1}{2}$ et $p_2 = \frac{2}{3}$, donc $p_2 - p_1 = \dfrac{1}{6}$ et :

$$p_{n+1} - p_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)!}.$$

Et cette égalité est également valable pour $n = 1$. On obtient alors par sommation télescopique que pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} p_n &= p_n - p_1 + p_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(p_{k+1} - p_k) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{(k+2)!} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n+1}\frac{(-1)^{k-3}}{k!} = \frac{1}{2} - \sum_{k=3}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!} + \cancel{\frac{(-1)^0}{0!}} + \cancel{\frac{(-1)^1}{1!}} + \frac{(-1)^2}{2!} \\ &\boxed{= 1 - \sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!}.} \end{aligned}$$

8. On reconnait dans l'expression précédente la somme partielle d'ordre $n+1$ de la série exponentielle de paramètre -1, de sorte que $\lim p_n$ existe et vaut $1 - e^{-1}$. Et donc :

$$q_n = p_n + \frac{1}{n+1}p_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-1} + 0 \boxed{= 1 - e^{-1}.}$$

Exercice 2 (Étude d'un procédé de sommation)

Partie I. Étude de deux exemples

1. (a) D'après la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n \boxed{= 2^n.}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\alpha = \frac{\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\boxed{= \alpha.}$$

(c) Comme $\alpha \neq 0$, $\boxed{\text{les séries } \sum a_n \text{ et } \sum a_n^* \text{ sont grossièrement divergentes.}}$

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la formule du binôme :

$$a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k \boxed{= \frac{1}{2^n}(z+1)^n.}$$

(b) i. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $z \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

Puisque $|z|<1$, $z^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, $\boxed{\sum_{n\geq 0} a_n \text{ converge et sa somme vaut } A(z) = \frac{1}{1-z}.}$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par l'inégalité triangulaire :

$$|a_n^*| = \left|\frac{z+1}{2}\right| \leq \frac{1+|z|}{2} < 1.$$

La série géométrique $\boxed{\sum_{n\geq 0} a_n^* \text{ est donc aussi convergente}}$ de somme

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = \frac{2}{1-z} = 2A(z).}$$

(c) i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n \geq |z| \geq 1$ donc $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. Par conséquent, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 0} a_n \text{ diverge grossièrement.}}$

ii. Dans le cas où $z=-2$, $a_n^* = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après la question 2.(a). Ainsi, $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ est une série géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ avec $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$. $\boxed{\text{Elle converge donc.}}$

iii. Pour $z = e^{i\theta}$, $a_n^* = \left(\frac{1+e^{i\theta}}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison :

$$r = \frac{1+e^{i\theta}}{2} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Puisque $|r| = \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| < 1$ car $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0,\pi[$, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 0} a_n^* \text{ converge.}}$ De plus :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k^* = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\left(\frac{1+e^{i\theta}}{2}\right)} = \frac{2}{1-e^{i\theta}} = \frac{2}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}$$

$$= \frac{2}{-2ie^{i\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{ie^{-i\theta/2}}{\sin(\theta/2)} \boxed{= 1 + i\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.}$$

Partie II. Étude du procédé de sommation

3. **Comparaison des convergences des deux suites.**

(a) i. Calculons :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

car $n-p \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ pour tout $p \in [\![0, k-1]\!]$.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons :

$$\frac{n^k}{2^n k!} = \frac{e^{k\ln(n) - n\ln(2)}}{k!} = \frac{e^{-n\ln(2)\left(1-k\frac{\ln(n)}{n}\right)}}{k!}.$$

Par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty}\left(1-k\frac{\ln(n)}{n}\right) = 1$, et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{2^n k!} = 0$ par opérations sur les limites. On en déduit par équivalence la limite $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 0.}$

(b) D'après la question précédente :

$$\forall k \in [\![0, n_0]\!], \quad \binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

L'entier n_0 étant fixé, on obtient par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_{n_0}(n) = 0.}$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle, il existe un rang $N \geq 0$ tel que :

$$\forall k \geq N, \quad |a_k| \leq \varepsilon.$$

Soit $n \geq N$. En sommant les inégalités précédentes pour k allant de N à n :

$$\sum_{k=N}^{n}\binom{n}{k}\frac{|a_k|}{2^n} \leq \sum_{k=N}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2^n}\sum_{k=N}^{n}\binom{n}{k} \leq \frac{\varepsilon}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \varepsilon.$$

Or :

$$\begin{aligned}
|a_n^*| = \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n}\right| &\leq \left|\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n}\right| + \left|\sum_{k=N}^{n}\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n}\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n}\right| + \sum_{k=N}^{n}\binom{n}{k}\frac{|a_k|}{2^n} \\
&\leq |S_{N-1}(n)| + \varepsilon
\end{aligned}$$

La suite $(S_{N-1}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant de limite nulle d'après la question précédente, il existe un rang $N' \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N', \quad |S_{N-1}(n)| \leq \varepsilon.$$

Dès lors :

$$\forall n \geq \max(N, N'), \quad |a_n^*| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ainsi, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n^* = 0.}$

(d) Remarquons que :

$$a_n^* - \ell = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - \ell)$$

car $\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 1$. On se ramène ainsi au cas précédent avec la suite $(a_n - \ell)$ qui tend vers 0. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty}(a_n^* - \ell) = 0$, et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n^* = \ell.}$

(e) Supposons $a_n = (-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons obtenu dans ce cas que (a_n^*) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ qui converge vers 0, alors que (a_n) est une suite divergente. $\boxed{\text{Il n'y a donc pas équivalence entre les convergences de } (a_n) \text{ et de } (a_n^*).}$

4. **Comparaison des convergences des séries $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n^*$.**

(a) Calculons $U_0 = 2^0 \sum_{k=0}^{0} a_k^* = a_0^* = a_0 \boxed{= S_0}$,

$$U_1 = 2^1\sum_{k=0}^{1} a_k^* = 2a_0^* + 2a_1^* = 2a_0 + \sum_{k=0}^{1} a_k \boxed{= 2S_0 + S_1}$$

et

$$\begin{aligned}
U_2 = 4\sum_{k=0}^{2} a_k^* &= 4a_0^* + 4a_1^* + 4a_2^* = 4a_0 + 2\sum_{k=0}^{1} a_k + \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}a_k \\
&= 4a_0 + 2(a_0 + a_1) + (a_0 + 2a_1 + a_2) = (a_0 + a_1 + a_2) + 3(a_1 + a_0) + 3a_0 \\
&\boxed{= S_2 + 3S_1 + 3S_0.}
\end{aligned}$$

(b) On procède par récurrence sur n.

$\boxed{\text{I}}$ La formule est vraie pour $n = 0$ d'après la question précédente puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{1}{k+1} S_k = S_0 = U_0$.

$\boxed{\text{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la formule vraie au rang n. On remarque que :

$$U_{n+1} = 2^{n+1} T_{n+1} = 2^{n+1}(T_n + a_{n+1}^*) = 2U_n + 2^{n+1} a_{n+1}^*.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$U_{n+1} = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k.$$

Avec la remarque de l'énoncé :

$$U_{n+1} = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (S_k - S_{k-1}).$$

Et en réordonnant les termes :

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} \right) S_k + S_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k+1} S_k + S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2}{k+1} S_k.
\end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, $\boxed{U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$U_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} S_k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S_{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_k = 2^n v_n^*.$$

(b) La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge par hypothèse vers la somme S de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$. Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (S_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers S.
D'après la question 3.(d), la suite (v_n^*) converge également vers S. De plus, pour tout $n \geq 1$:

$$T_n = \frac{U_n}{2^n} = 2\frac{U_n}{2^{n+1}} = 2v_{n+1}^*.$$

Donc (T_n) converge vers $2S$. Ainsi, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n^* \text{ converge, et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.}$

6. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a établi que $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On observe dans ce cas que la série $\sum a_n$ diverge alors que $\sum a_n^*$ converge. $\boxed{\text{Les séries } \sum a_n \text{ et } \sum a_n^* \text{ ne sont donc pas toujours même nature.}}$

Exercice 3 (Racines carrées de matrices)

1. Puisque $M \in \mathsf{Rac}(A)$, $M^2 = A$ et :

$$A \times M = M^2 \times M = M \times M^2 = M \times A.$$

Donc $\boxed{A \text{ et } M \text{ commutent.}}$

Partie I. Étude de deux exemples dans le cas $n = 3$

2. Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de A. On remarque que $C_2 = -C_3$ et que C_1 et C_2 forment une famille libre car elles sont non colinéaires. Donc $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2.}$

3. (a) Considérons la matrice $A - I_3 = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 5 \\ -5 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. De même, si on note C_1, C_2, C_3 ses colonnes, on remarque que $C_1 = -C_2 + C_3$ et que C_1 et C_2 sont non colinéaires. Par conséquent :
   - $\mathrm{rg}(A - I_3) = 2$ et par théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_3)) = 1$;
   - puisque $-C_1 - C_2 + C_3 = 0_{3,1}$, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient à la droite vectorielle $\mathrm{Ker}(A - I_3)$, de sorte que $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

   Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})) = \dim(\mathrm{Ker}(A - I_3)) \boxed{= 1}$, et $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}((-1, -1, 1))$. Le vecteur $\boxed{u_2 = (-1, -1, 1)}$ engendre $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et est non nul. Il constitue donc une base de $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ de la forme souhaitée.

   (b) Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et :

$$P = M_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   La famille $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si, P est inversible. Or :

$$P \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\overset{\mathscr{L}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\overset{\mathscr{L}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2} L_2}{\overset{\mathscr{L}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   Cette dernière matrice étant inversible car échelonnée avec trois pivots, P est inversible. Ainsi, $\boxed{\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

   (c) Calculons :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{3,1}, \quad A \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, $\boxed{f(u_1) = 0_{\mathbb{R}^3},\ f(u_2) = u_2 \text{ et } f(u_3) = 16u_3.}$

   (d) On reconnait ici une formule de changement de base. Avec les notations précédemment introduites :

$$M_{\mathscr{C}}(f) = P^{-1} M_{\mathscr{B}}(f) P = P^{-1} A P$$

   où $\boxed{P = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ et :

$$\boxed{M_{\mathscr{C}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \end{array}.}$$

4. (a) Gagnons du temps en écrivant directement $\mathscr{C}(D)$ sous forme d'un sous-espace engendré par une famille de vecteurs. Soit pour cela $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} MD = DM &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & m_{1,2} & 16m_{1,3} \\ 0 & m_{2,2} & 16m_{2,3} \\ 0 & m_{3,2} & 16m_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ 16m_{3,1} & 16m_{3,2} & 16m_{3,3} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^3,\ i \neq j,\ m_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathscr{C}(D)=\left\{\begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0\\ 0 & m_{2,2} & 0\\ 0 & 0 & m_{3,3}\end{pmatrix},\ m_{1,1},m_{2,2},m_{3,3}\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(E_{1,1},E_{2,2},E_{3,3}\right).$$

$\boxed{\mathscr{C}(D)\text{ est donc un sous-espace vectoriel de }\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ en tant que sous-espace engendré, et $(E_{1,1},E_{2,2},E_{3,3})$ est génératrice de $\mathscr{C}(D)$, et libre en tant que sous-famille de la base canonique qui est libre : c'est donc une $\boxed{\text{base de }\mathscr{C}(D).}$

(b) Soit M une matrice de $\mathsf{Rac}(D)$. D'après la question 1, M appartient à $\mathscr{C}(D)$. Elle est donc diagonale $M=\mathrm{diag}(a,b,c)$ par la question précédente. Et puisque $D=M^2=\mathrm{diag}(a^2,b^2,c^2)$, on obtient $a^2=0$, $b^2=1$ et $c^2=16$, soit $a=0$, $b=\pm 1$ et $c=\pm 4$. Ainsi, M est l'une des quatre matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3 4\end{pmatrix}\quad\text{où}\quad \varepsilon_2,\varepsilon_3\in\{1,-1\}.$$

Réciproquement, on vérifie aisément que ces quatre matrices appartiennent à $\mathsf{Rac}(D)$. Ainsi :

$$\boxed{\mathsf{Rac}(D)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\right\}.}$$

5. (a) Pour toutes matrices M_1 et M_2 de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et pour tout scalaire $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\Phi(\lambda M_1+M_2)=P(\lambda M_1+M_2)P^{-1}=\lambda PM_1P^{-1}+PM_2P^{-1}=\lambda\Phi(M_1)+\Phi(M_2).$$

Donc Φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Et on vérifie aisément qu'il est de plus bijectif, d'inverse $M\mapsto P^{-1}MP$. Donc $\boxed{\Phi\text{ est un automorphisme de }\mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$

(b) Soit M dans $\mathsf{Rac}(D)$. Alors $\Phi(M)^2=(PMP^{-1})^2=PM^2P^{-1}=PDP^{-1}=A$, de sorte que $\Phi(\mathsf{Rac}(D))\subset\mathsf{Rac}(A)$.

De même, si N appartient à $\mathsf{Rac}(A)$, alors $\Phi^{-1}(N)^2=(P^{-1}NP)^2=P^{-1}N^2P=P^{-1}AP=D$. D'où l'inclusion $\Phi^{-1}(\mathsf{Rac}(A))\subset\mathsf{Rac}(D)$, et donc :

$$\mathsf{Rac}(A)=\Phi(\Phi^{-1}(\mathsf{Rac}(A))\subset\Phi(\mathsf{Rac}(D)).$$

Ainsi, $\boxed{\Phi(\mathsf{Rac}(D))=\mathsf{Rac}(A).}$

(c) Puisque Φ est injective et que $\mathsf{Rac}(D)$ est de cardinal 4, $\mathsf{Rac}(A)=\Phi(\mathsf{Rac}(D))$ est aussi de cardinal 4 : $\boxed{A\text{ admet exactement 4 racines carrées.}}$

6. (a) Puisque $N^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\neq 0_3$ et $N^3=0_3$, alors $\boxed{g^2\neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}\text{ et que }g^3=0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}.}$

(b) Puisque $M^2=N$, alors $h^2=g$ et par la question précédente, $h^4\neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $h^6=0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. L'ensemble $I=\{k\in\mathbb{N}\mid h^k=0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (elle contient 6) : elle admet un plus petit élément p, qui est supérieur à 5 puisque $h^4\neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ et donc $h^k\neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ pour $k=0,\dots,4$.

Par définition, $\boxed{\text{l'entier }p\geq 5\text{ satisfait bien }h^{p-1}\neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}\text{ et }h^p=0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}.}$

(c) Puisque $h^{p-1}\neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$, $\boxed{\text{il existe }x_0\in\mathbb{R}^3\text{ tel que }h^{p-1}(x_0)\neq 0_{\mathbb{R}^3}.}$

Soient $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1}$ des scalaires satisfaisant :

$$\alpha_0x_0+\alpha_1h(x_0)+\cdots+\alpha_{p-1}h^{p-1}(x_0)=0_{\mathbb{R}^3}.$$

En composant par l'application linéaire h^{p-1} :

$$\alpha_0\underbrace{h^{p-1}(x_0)}_{\neq 0_{\mathbb{R}^3}}+\underbrace{\alpha_1h^p(x_0)+\cdots+\alpha_{p-1}h^{2p-2}(x_0)}_{=0_{\mathbb{R}^3}}=0_{\mathbb{R}^3},$$

et donc $\alpha_0 = 0$. En substituant, on obtient :

$$\alpha_1 h(x_0) + \cdots + \alpha_{p-1} h^{p-1}(x_0) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

En composant par h^{p-2}, on obtient de même $\alpha_1 = 0$, et ainsi de suite $\alpha_2 = \cdots = \alpha_{p-1} = 0$.

Ainsi, $(x_0, h(x_0), \ldots, h^{p-1}(x_0))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ de cardinal $p \geq 5$. Mais ceci est impossible dans l'espace $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3.

Par conséquent, $\boxed{\mathsf{Rac}(N) = \emptyset.}$

Partie II. Racines carrées d'une matrice tridiagonale

7. Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= (X^2-1)(\lambda P + Q)' + n(1-X)(\lambda P + Q) = (X^2-1)(\lambda P' + Q') + n(1-X)(\lambda P + Q) \\ &= \lambda\left[(X^2-1)P' + n(1-X)P\right] + \left[(X^2-1)Q' + n(1-X)Q\right] \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q).\end{aligned}$$

D'autre part, considérons P dans $\mathbb{R}_n[X]$ qu'on écrit $P = aX^n + R$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par linéarité :

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= a\varphi(X^n) + \varphi(R) = anX^{n-1}(X^2-1) + n(1-X)X^n + (X^2-1)R' + n(1-X)R \\ &= -anX^{n-1} + anX^n + (X^2-1)R' + n(1-X)R \in \mathbb{R}_n[X]\end{aligned}$$

car $\deg((X^2-1)R') \leq 2 + \deg(R') \leq 2 + (n-2) = n$ et $\deg(n(1-X)R) \leq 1 + (n-1) = n$.

Ainsi, φ est linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$: c'est bien $\boxed{\text{un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

8. Calculons $\varphi(1) = n(1-X)$, $\varphi(X^n) = nX^n - nX^{n-1}$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\varphi(X^k) = k(X^2-1)X^{k-1} + n(1-X)X^k = (k-n)X^{k+1} + nX^k - kX^{k-1}.$$

Ainsi :

$$M_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \ldots & \varphi(X^{n-2}) & \varphi(X^{n-1}) & \varphi(X^n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} n & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ -n & n & -2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -n+1 & n & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n & -n+1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -2 & n & -n \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -1 & n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-2} \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array} \end{array} \boxed{= A_n.}$$

9. Calculons :

$$\varphi(P_0) = \varphi((X-1)^n) = n(X^2-1)(X-1)^{n-1} + n(1-X)(X-1)^n = \left[n(X+1) + n(1-X)\right](X-1)^n = 2nP_0$$

et

$$\varphi(P_n) = \varphi((X+1)^n) = \left[n(X-1) + n(1-X)\right](X+1)^n = 0 \times P_n.$$

Soit à présent $k \in [\![0, n]\!]$. Calculons :

$$\begin{aligned}(X^2-1)P_k' &= (n-k)(X^2-1)(X-1)^{n-k-1}(X+1)^k + k(X^2-1)(X-1)^{n-k}(X+1)^{k-1} \\ &= \left[(n-k)(X+1) + k(X-1)\right]P_k = (nX + (n-2k))\,P_k.\end{aligned}$$

D'où :

$$\varphi(P_k) = (X^2-1)P_k' + n(1-X)P_k = \left[nX + (n-2k) + n - nX\right]P_k \boxed{= (2n-2k)P_k.}$$

10. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ des scalaires tels que :

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n = 0_{\mathbb{R}_n[X]}. \qquad (*)$$

Remarquons que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, -1 est racine de multiplicité exactement k de P_k, de sorte que :

$$P_k(-1) = P_k'(-1) = \cdots = P_k^{(k-1)}(-1) = 0 \quad \text{et} \quad P_k^{(k)}(-1) \neq 0.$$

En évaluant $(*)$ en -1, on obtient :

$$\alpha_0 \underbrace{P_0(-1)}_{\neq 0} + \underbrace{\alpha_1 P_1(-1) + \cdots + \alpha_n P_n(-1)}_{=0} = 0,$$

et donc $\lambda_0 = 0$. Ainsi, $(*)$ se récrit :

$$\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n = 0_{\mathbb{R}_n[X]}.$$

En dérivant cette égalité, puis en évaluant de nouveau en -1, on obtient :

$$\alpha_1 \underbrace{P_1(-1)}_{\neq 0} + \underbrace{\alpha_2 P_2(-1) + \cdots + \alpha_n P_n(-1)}_{=0} = 0$$

et donc $\lambda_1 = 0$. En poursuivant, on obtient ensuite $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est donc libre, de cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$: $\boxed{\text{c'est donc une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

À l'aide de la question précédente :

$$\boxed{M_{\mathscr{B}'}(\varphi) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varphi(P_0) & \varphi(P_1) & \dots & \varphi(P_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2n-2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2n-2n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{array} \end{array} .}$$

11. Notons $D = \operatorname{diag}(2n, 2n-2, \dots, 2, 0) = M_{\mathscr{B}'}(\varphi)$, et soit $k \in [\![0,n]\!]$. La matrice $D - (2n-2k)I_{n+1}$ est diagonale avec un unique coefficient nul. Elle est donc de rang $(n+1) - 1 = n$. Par conséquent :

$$\operatorname{rg}(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \operatorname{rg}(M_{\mathscr{B}'}(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})) = \operatorname{rg}(D - (2n-2k)I_{n+1}) = 1.$$

Par le théorème du rang, $\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}) \text{ est de dimension } 1.}$ C'est donc une droite vectorielle, qui est par conséquent engendrée par n'importe lequel de ses vecteurs non nuls. Puisqu'enfin, P_k appartient à
$\operatorname{Ker}(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ car $\varphi(P_k) = (2n-2k)P_k$, on obtient donc $\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \operatorname{Vect}(P_k).}$

12. (a) Puisque B appartient à $\mathsf{Rac}\,(A_n)$, B et A_n commutent par la première question. Par conséquent, $\boxed{g \text{ et } \varphi \text{ commutent également.}}$

(b) Rappelons un résultat vu en TD.

> **Rappel. Un résultat à retenir.**
> Si $f, g \in \mathscr{L}(E)$ commutent, c'est-à-dire si $f \circ g = g \circ f$, alors $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont stables par g.

Ici, g commute avec φ, donc également avec $\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Par conséquent, $\operatorname{Ker}(\varphi - (2n - 2k)\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ est stable par g.

Dans le cas où ce résultat n'était plus connu, on pouvait également procéder directement comme suit : soit $P \in \operatorname{Ker}(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$, de sorte que $\varphi(P) = (2n-2k)P$. Alors :

$$\varphi(g(P)) = g(\varphi(P)) = g((2n-2k)P) = (2n-2k)g(P).$$

Et donc $(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})(g(P)) = 0$, si bien que $g(P) \in \operatorname{Ker}(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$. Ainsi, $\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}) \text{ est stable par } g.}$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, puisque $P_k \in \mathrm{Ker}(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$, alors $g(P_k)$ appartient à $\mathrm{Ker}(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \mathrm{Vect}(P_k)$. $\boxed{\text{Il existe donc un scalaire } \lambda_k \text{ tel que } g(P_k) = \lambda_k P_k.}$

Enfin :

$$(2n-2k)P_k = \varphi(P_k) = g^2(P_k) = g(g(P_k)) = \lambda_k^2 P_k.$$

Et comme $P_k \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, on obtient $\boxed{\lambda_k^2 = (2n-2k).}$

(c) On en déduit que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $g(P_k) = \varepsilon_k \sqrt{2n-2k}$ avec $\varepsilon = \pm 1$. Et donc :

$$M_{\mathscr{B}'}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} g(P_0) & \dots & g(P_{n-1}) & g(P_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \varepsilon_0\sqrt{2n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{n-1}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ P_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ P_n \end{array}.$$

13. Notons Δ l'ensemble des matrices obtenues ci-dessus, et P la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}$. On vient d'établir que si B est dans $\mathsf{Rac}(A_n)$, alors $P^{-1}BP = M_{\mathscr{B}'}(g)$ appartient à Δ.

    Réciproquement, si C est dans Δ, alors :

    $$(PCP^{-1})^2 = PC^2P^{-1} = P\mathrm{diag}(2n, 2n-2, \dots, 0)P^{-1} = A_n$$

    par formule de changement de base, de sorte que PCP^{-1} appartient à $\mathsf{Rac}(A_n)$. Ainsi, l'application $B \in \mathsf{Rac}(A_n) \mapsto P^{-1}BP \in \Delta$ est bijective, de bijection réciproque $C \in \Delta \mapsto PCP^{-1} \in \mathsf{Rac}(A_n)$.

    Puisque $\mathrm{Card}(\Delta) = 2^n$, $\boxed{\mathsf{Rac}\,(A_n) \text{ est fini de cardinal } 2^n.}$

Partie III. Racines carrées de I_n

14. On reconnait ici la caractérisation algébrique d'une $\boxed{\text{symétrie vectorielle.}}$

15. On va construire une famille infinie de symétries vectorielles. Considérons pour cela l'hyperplan $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la droite vectorielle D_α dirigée par le vecteur $u_\alpha = (1, \alpha, 0, \dots, 0)$. Puisque u_α n'appartient pas à H, on sait que H et D_α sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$:

    $$\mathbb{R}^n = H \oplus D_\alpha.$$

    Considérons alors s_α la symétrie vectorielle par rapport à H dans la direction de D_α, et M_α la matrice de s_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

    Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $M_\alpha^2 = I_n$ et M_α est une racine carrée de I_n. De plus, si α et β sont des réels distincts, s_α est distinct de s_β puisque $\mathrm{Ker}(s_\alpha + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) = D_\alpha \neq D_\beta = \mathrm{Ker}(s_\beta + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$, et donc M_α est distinct de M_β.

    On construit ainsi une injection $\alpha \mapsto M_\alpha$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathsf{Rac}(I_n)$. Ainsi, $\boxed{\text{il existe une infinité de racines carrées de } I_n.}$