

Concours blanc 2 du 13/05/2026

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1 (Probabilités)

On effectue une suite de tirages dans une urne contenant initialement une boule blanche et une boule rouge. À l'issue de chaque tirage, on remet dans l'urne la boule que l'on vient de tirer et on rajoute une boule blanche, si bien que lors du $n^{\text{ème}}$ tirage, l'urne contient une boule rouge et n boules blanches.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- A_n l'événement : « lors des n premiers tirages, on n'a jamais obtenu deux fois consécutivement la boule rouge » ;
- B_n l'événement « on a obtenu une boule blanche lors du $n^{\text{ème}}$ tirage » et $R_n = \overline{B_n}$;
- $p_n = P(A_n \cap B_n)$ et $q_n = P(A_n)$.

On étudie dans cet exercice les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1. Calculer p_1 , q_1 et p_2 , q_2 .
2. Justifier que pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n+1} \leq q_n \leq \frac{5}{6}$.
3. Soit $n \geq 2$. Comparer les événements $A_n \cap B_n$ et $A_{n-1} \cap B_n$.
4. En déduire que pour tout $n \geq 2$, $p_n = q_{n-1} \frac{n}{n+1}$.
5. Prouver que pour tout $n \geq 2$, $q_n = p_n + \frac{1}{n+1} p_{n-1}$.
6. Montrer alors que pour tout $n \geq 2$, $p_{n+1} - p_n = -\frac{1}{n+2} (p_n - p_{n-1})$.
7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!}$.
8. Montrer que la suite $(q_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel que l'on précisera.

Exercice 2 (Étude d'un procédé de sommation)

À toute suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on associe la suite $(a_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$$

L'objet de ce problème est de comparer les propriétés de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ aux propriétés de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$.

Partie I. Étude de deux exemples

1. Cas d'une suite constante.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. On suppose que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = \alpha$.

- Expliciter $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$.
- La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ (resp. $\sum_{n \geq 0} a_n^*$) est-elle convergente ?

2. Cas d'une suite géométrique.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = z^n$.

- Exprimer a_n^* en fonction de z et n .
- On suppose que $|z| < 1$.
 - Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. On redémontrera le résultat de cours.
 - Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.
- On suppose que $|z| \geq 1$.
 - Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$?
 - Quelle est la nature de $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ si $z = -2$?
 - On suppose $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ est convergente.
Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$.

Partie II : Étude du procédé de sommation

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs réelles.

3. Comparaison des convergences des deux suites.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ fixé.
 - Justifier que $\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.
 - En déduire la limite de $\frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et n_0 un entier naturel fixé.
On considère pour $n > n_0$, la somme $S_{n_0}(n) = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_{n_0}(n)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?
- On suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que $(a_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
- On suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de $(a_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$?
- La convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle équivalente à la convergence de la suite $(a_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$?

4. Comparaison des convergences des séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} a_n^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^n a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

- (a) Pour $n \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k .
 (b) Montrer par récurrence sur l'entier n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k.$$

Indication. On pourra remarquer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$.

5. On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $v_k = S_{k-1}$ et $v_0 = S_{-1} = 0$.
- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n-1} = 2^n v_n^*$.
- (b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ est convergente et exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
6. La convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$?

Exercice 3 (Racines carrées de matrices)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle racine carrée de A toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

On note $\text{Rac}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^2 = A\}$ l'ensemble des racines carrées de A .

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $M \in \text{Rac}(A)$. Montrer que A et M commutent.

Partie I. Étude de deux exemples dans le cas $n = 3$

Dans cette partie, on note $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note également f et g les endomorphismes de \mathbb{R}^3 canoniquement associés aux matrices A et N .

2. Déterminer $\text{rg}(A)$.
3. Dans cette question, on note $u_1 = (0, 1, 1)$ et $u_3 = (2, -1, 1)$.
- (a) Montrer avec le moins de calculs possibles que $\dim(\text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})) = 1$, et déterminer deux réels x et y tels que $u_2 = (x, y, 1)$ soit une base de $\text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.
- (b) Montrer que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- (c) Pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, calculer $f(u_i)$.
- (d) Montrer qu'il existe une matrice $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \text{Diag}(0, 1, 16)$, et donner une telle matrice P .

4. Dans cette question, on note $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que $\mathcal{C}(D) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid MD = DM\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension 3, et en donner une base.
- (b) En utilisant la question 1, déterminer $\text{Rac}(D)$.
5. (a) On note encore P la matrice de la question 3.(d). Montrer que $\Phi : \begin{matrix} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & PMP^{-1} \end{matrix}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- (b) Prouver que $\Phi(\text{Rac}(D)) = \text{Rac}(A)$.
- (c) En déduire alors le nombre de racines carrées de A .

6. Le but de cette question est de prouver que $\text{Rac}(N) = \emptyset$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $M \in \text{Rac}(N)$. On note alors h l'endomorphisme canoniquement associé à M .
- Montrer que $g^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et que $g^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.
 - En déduire qu'il existe $p \geq 5$ tel que $h^p = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $h^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.
 - Justifier qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $h^{p-1}(x_0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrer que la famille $(x_0, h(x_0), \dots, h^{p-1}(x_0))$ est libre. Aboutir à une contradiction.

Partie II. Racines carrées d'une matrice tridiagonale

Dans tout cette partie, on fixe $n \geq 3$ et on note :

$$A_n = \begin{pmatrix} n & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -n & n & -2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -n+1 & n & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n & -n+1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -2 & n & -n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

On note également $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (X^2 - 1)P' + n(1 - X)P \end{matrix}$.

Enfin, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $P_k = (X - 1)^{n-k}(X + 1)^k$.

- Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Montrer soigneusement que la matrice de φ dans la base canonique \mathcal{B} de $\mathbb{R}_n[X]$ est A_n .
- Prouver que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi(P_k) = (2n - 2k)P_k$.
- Justifier que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que la matrice de φ dans la base \mathcal{B}' est diagonale dont on précisera les coefficients diagonaux.
- En déduire, à l'aide de méthodes matricielles que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{Ker}(\varphi - (2n - 2k)\text{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ est de dimension 1, puis que $\text{Ker}(\varphi - (2n - 2k)\text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \text{Vect}(P_k)$.
- Soit $B \in \text{Rac}(A_n)$, et soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont la matrice dans la base canonique est B .
 - Justifier g et φ commutent.
 - Prouver que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{Ker}(\varphi - (2n - 2k)\text{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ est stable par g , puis qu'il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $g(P_k) = \lambda_k P_k$. Que vaut alors λ_k^2 ?
 - Prouver enfin que la matrice de g dans la base \mathcal{B}' est de la forme

$$\text{diag}(\varepsilon_0 \sqrt{2n}, \varepsilon_1 \sqrt{2n-2}, \dots, \varepsilon_{n-1} \sqrt{2}, 0)$$

avec $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \{-1, 1\}^n$.

- Prouver enfin que $\text{Rac}(A_n)$ est de cardinal 2^n .

Partie III. Racines carrées de I_n

Dans cette partie, $n \geq 2$.

- Comment appelle-t-on un endomorphisme $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $s^2 = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$?
- En déduire que $\text{Rac}(I_n)$ est infini.