TD1

Raisonner et rédiger

Quantificateurs et connecteurs logiques

Exercice 1.1 (★)

Énoncer pour chaque proposition $\mathscr{P}$ qui suit, la proposition (**non** $\mathscr{P}$).

1. Dans la classe, il y a 16 filles et 18 garçons.
2. Chaque été, il pleut au moins une journée en Bretagne.
3. L'été dernier, il a plu tous les jours en Bretagne.
4. S'il pleut, je prends mon parapluie.
5. Il n'y a pas de fumée sans feu.

Exercice 1.2 (★)

Écrire la négation, la contraposée et la réciproque de l'implication bien connue $a \times b = 0 \Rightarrow (a = 0$ ou $b = 0)$
Pour chacune d'entre elles, donner sa valeur de vérité.

Exercice 1.3 (★★ - ✍)

Soient P, Q et R trois propositions logiques. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ R \Rightarrow P \end{cases}$ et $\begin{cases} P \Leftrightarrow Q \\ Q \Leftrightarrow R \\ R \Leftrightarrow P \end{cases}$;
2. $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$ et $((P \wedge Q) \Rightarrow R)$;
3. $((P \vee Q) \Rightarrow R)$ et $((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R))$.

Exercice 1.4 (★★)

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$;
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$;
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$.

Exercice 1.5 (★★)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Traduire en français les énoncés mathématiques suivants puis écrire leur négation :

1. $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geq m$;
2. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y$;
3. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq M$;
4. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$;
5. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$;
6. $\exists A \in \mathbb{R}, \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow f(x) = C$.

Exercice 1.6 (★★)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Traduire mathématiquement les énoncés suivants puis écrire leur négation :

1. la fonction f n'est pas monotone ;
2. la fonction f est la fonction nulle ;
3. la fonction f n'est pas constante ;
4. la fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur ;
5. la fonction f présente un minimum ;
6. la fonction f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 1.7 (★★ - Permutation de quantificateurs - ✍)
Soit $\mathscr{P}(x,y)$ une proposition dépendant de deux variables, et soient E et F deux ensembles.
Montrer que $(\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ \mathscr{P}(x,y)) \Rightarrow (\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ \mathscr{P}(x,y))$. Que dire de la réciproque ?

> Supposons que $\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y)$. Notons alors x_0 un élément de E tel que $\forall y \in F$, $P(x_0, y)$.
> Soit $y \in F$. Alors $P(x_0,y)$ est vraie. Et donc $\exists x \in E,\ P(x,y)$ est vraie (car on peut prendre $x = x_0$). Et par conséquent, nous venons de prouver que $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x,y)$. Nous venons donc bien de prouver que
>
> $$(\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y)) \Rightarrow (\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x,y)).$$
>
> En revanche, la réciproque est fausse, puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \leq y$ est vraie (pour tout réel, il existe un réel plus grand), alors que $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \leq y$ est fausse (il n'existe pas de réel plus grand que tous les réels).
>
> **Remarque.** Nous avons dit en cours qu'il n'était pas toujours permis de permuter les symboles $\forall$ et $\exists$. Nous venons donc de prouver que si $\exists\forall$ est vraie, alors $\forall\exists$ est vraie aussi, mais la réciproque est fausse! Et donc on n'a toujours pas le droit de permuter sans précaution les symboles $\forall$ et $\exists$.

Modes de raisonnement

Exercice 1.8 (★ - ✍)
Soient x et y deux réels. Montrer que $\min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$ et $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$.

Exercice 1.9 (★★)
Déterminer l'ensemble des réels x tels que le prédicat suivant soit vrai :

$$\forall t \in [0,1],\ (x \geq t) \Rightarrow (x \geq 2t).$$

> Notons $\mathscr{P}(x)$ le prédicat de l'énonce : $\forall t \in [0,1],\ x \geq t \Rightarrow x \geq 2t$.
> Nous allons distinguer quatre cas.
>
> - Si $x \geq 2$, alors pour tout $t \in [0,1]$, $x \geq t$ et $x \geq 2 \geq 2t$, si bien que $\mathscr{P}(x)$ est vrai.
> - Si $x \in]0,2[$, alors $\frac{x}{2} \in]0,1[$. Soit alors $t \in \left]\frac{x}{2}, 1\right[$. Alors $x \geq t$ et $t > \frac{x}{2}$, donc $x < 2t$. Par conséquent, $x \geq t \Rightarrow x \geq 2t$ est fausse, et donc $\mathscr{P}(x)$ est fausse.
> - Si $x = 0$, alors pour $t \in [0,1]$, deux cas de figure se présentent : soit $t = 0$, et alors $x \geq t$ et $x \geq 2t$ sont vraies, si bien que l'implication $x \geq t \Rightarrow x \geq 2t$ est vraie.
>
>   Soit $t > 0$, et alors $x \geq t$ est fausse, donc l'implication $x \geq t \Rightarrow x \geq 2t$ est vraie. Donc $\mathscr{P}(x)$ est vraie.

- Enfin, si $x < 0$, alors pour tout $t \in [0,1], x \geq t$ est fausse, donc l'implication $x \geq t \Rightarrow x \geq 2t$ est vraie. Et par conséquent $\mathscr{P}(x)$ est vraie.

En résumé, l'ensemble des réels x tels que $\mathscr{P}(x)$ soit vraie est $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

Exercice 1.10 (★ - ✍)

Soit x un réel. Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.

Exercice 1.11 (★)

Prouver l'assertion suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x \notin \mathbb{Q}$ **ou** $\exists n \in \mathbb{N}^*, nx \in \mathbb{Z})$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par disjonction de cas :

- si $x \notin \mathbb{Q}$, alors l'assertion $(x \notin \mathbb{Q}$ ou $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ nx \in \mathbb{Z}$) est évidemment vraie.
- Si $x \in \mathbb{Q}$, notons alors $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$. Et donc $qx = p \in \mathbb{Z}$. Ainsi, la proposition $\exists n \in \mathbb{N}^*, nx \in \mathbb{Z}$ est vraie.

Donc la proposition $x \notin \mathbb{Q}$ ou $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ nx \in \mathbb{Z}$ l'est aussi.

Exercice 1.12 (★★)

1. Démontrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un nombre irrationnel.
2. Le réel $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ? Même question pour $\sqrt{4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}}$.
3. Montrer que si α est irrationnel, alors l'écriture du réel $a + \alpha b$ avec $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ est unique.

Exercice 1.13 (★★)

Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y > 2 \Rightarrow (x > 1$ ou $y > 1)$.

Écrire également la négation de cette proposition, ainsi que la réciproque de l'implication qu'elle contient. Cette réciproque est-elle vraie ?

Soient x, y deux réels. Nous allons prouver la contraposée de l'implication annoncée, c'est à-dire que $(x \leq 1$ et $y \leq 1) \Rightarrow x + y \leq 2$. Mais cette implication est évidente par somme d'inégalités. Et donc l'implication de départ est vraie.

La négation de cette proposition est :

$$\exists x, y \in \mathbb{R},\ x + y > 2 \text{ et } x \leq 1 \text{ et } y \leq 1.$$

Enfin, l'implication réciproque est $(x > 1$ **ou** $y > 1) \Rightarrow x + y > 2$. Elle n'est généralement pas vraie, comme le prouve le cas $x = 2,\ y = 0$.

Exercice 1.14 (★★)

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions affines et $\mathscr{B}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables pour lesquelles $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer par analyse-synthèse que toute fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme, d'une et une seule manière, d'une fonction de $\mathscr{A}$ et d'une fonction de $\mathscr{B}$.

Exercice 1.15 (★★)

Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Exercice 1.16 (★★)

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}, f(xy) = f(x) + f(y)$.
2. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y$.

Exercice 1.17 (★★★)

On cherche toutes les isométries de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad |f(x) - f(y)| = |x - y|$.

1. **Analyse.** Soit f une isométrie. On note δ la fonction $x \longmapsto f(x) - f(0)$ sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer, en étudiant la quantité $(f(x) - f(y))^2$, que $\delta(x)\delta(y) = xy$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire la forme de f.
2. **Synthèse.** Conclure.

Raisonnement par récurrence

Exercice 1.18 (★★)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout n entier naturel, $0 \leq u_n \leq 4$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{u_n}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et déterminer une expression explicite de u_n pour tout n dans $\mathbb{N}$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = n(n-1)$.

Exercice 1.19 (★★ - Une suite récurrente d'ordre 2)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3, u_1 = 7$ et :

$$\forall n \geq 2, \; u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 3^n$.

> Montrons par récurrence double que pour tout $n \geq 0$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = 2^{n+1} + 3^n$ » est vraie.
>
> **Init.** $2^{0+1} + 3^0 = 3 = u_0$ et $2^{1+1} + 3^1 = 7 = u_1$ donc $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.
>
> **Hér.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies. Alors :
>
> $$\begin{aligned} u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n &= 5\left(2^{n+2} + 3^{n+1}\right) - 6\left(2^{n+1} + 3^n\right) \\ &= 2^{n+1}(5 \times 2 - 6) + 3^n(5 \times 3 - 6) \\ &= 2^{n+1} \times 4 + 3^n \times 9 = 2^{n+3} + 3^{n+2}. \end{aligned}$$
>
> D'où $\mathscr{P}(n+2)$ vraie.
>
> Par principe de récurrence, $u_n = 2^{n+1} + 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.20 (★★)
Au rugby, une équipe peut marquer 3 points (drop ou pénalité), 5 points (essai non transformé) ou 7 points (essai transformé).
Déterminer l'ensemble des scores possibles.

Exercice 1.21 (★★)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \leq (n+1)!$.

> On procède par récurrence simple.
>
> **Init.** Puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k! = 1$ et $(1+1)! = 2$, la propriété est vraie au rang $n = 1$.
>
> **Hér.** Soit $n \geq 1$. Supposons la propriété au rang n. Alors :
>
> $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k! &= \sum_{k=1}^{n} k! + (n+1)! \\ &\leq (n+1)! + (n+1)! \quad \text{par hyp. de réc.} \\ &\leq 2 \times (n+1)! \leq n+2 \times (n+1)! = (n+2)! \end{aligned}$$
>
> D'où la propriété au rang $n+1$.
>
> On conclut par principe de récurrence.

Exercice 1.22 (★★)
Montrer que pour tout n entier naturel non nul, il existe un unique couple (p, q) d'entiers naturels tels que $n = 2^p(2q+1)$.

Exercice 1.23 (★★)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2\right)$.
Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Il s'agit donc de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 = 1$ Procédons par récurrence forte sur n. On a évidemment $u_0 = 1$, donc la récurrence est initialisée.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}, u_k = 1$.
Alors $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(u_0^2 + \cdots + u_n^2\right) = \frac{1}{n+1}\left(1^2 + \cdots + 1^2\right) = \frac{1}{n+1}(n+1) = 1$.
Donc par le principe de récurrence **forte**, pour tout $n \in \mathbf{N}, u_n = 1$. Ainsi, la suite (u_n) est constante égale à 1.

Exercice 1.24 (★★)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \begin{cases} 2u_{\frac{n}{2}} + 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n + 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

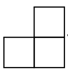
Exercice 1.25 (★★★)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels (ce qui signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$) vérifiant les deux assertions suivantes :

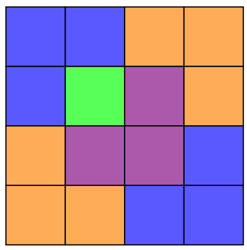
- $\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n = p$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$.

Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$.

Exercice 1.26 (★★★★ - Un peu de Tétris)

On dispose d'un échiquier de taille $2^n \times 2^n$ (où $n \geq 2$), que l'on souhaite remplir à l'aide d'un monomino (pièce carrée de taille 1×1 : ) et de triominos coudés .

Montrer que quelle soit la position du monomino sur l'échiquier, il est possible de paver le reste de l'échiquier avec les triominos, comme sur la figure ci-contre.



Nous allons raisonner par récurrence (simple) sur n, et plus précisément prouver la proposition $\mathscr{P}(n)$: « pour tout échiquier de taille $2^n \times 2^n$, quelle que soit la position du monomino, il est possible de paver le reste de l'échiquier avec des triominos ».

Pour $n = 2$, ça se passe d'explications.

Supposons donc que l'on sache paver tout échiquier carré de côté 2^n privé d'une case à l'aide de triominos, et considérons un échiquier carré de côté 2^{n+1}, sur lequel se trouve déjà un monomino. Et procédons en plusieurs étapes.

- **Étape 1 :** partageons l'échiquier en 4 échiquiers carrés de côté 2^n.
- **Étape 2 :** Le monomino se trouve alors dans l'un de ces 4 sous-échiquiers. Par hypothèse de récurrence, on peut donc paver ce sous-échiquier avec des triominos.
- **Étape 3 :** positionnons un triomino au centre de l'échiquier, de manière à ce qu'il intersecte les trois sous-échiquiers ne contenant pas le monomino.
- **Étape 4 :** les trois sous-échiquiers restants ont alors une seule case occupée. Par hypothèse

de récurrence, ils sont donc pavables par des triominos. Et donc quelle que soit la position de départ du monomino, l'échiquier de côté 2^{n+1} est pavable par des triominos.

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
On conclut par principe de récurrence.
