TD13

Applications

Généralités sur les applications

Exercice 13.1 (★)

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$. Déterminer les ensembles suivants (on pourra pour cela tracer la courbe représentative de f) :

$$f(\mathbb{R}),\ f([0,\pi]),\ f([-\pi/2,\pi/2]),\ f^{-1}(\{0\}),\ f^{-1}(\{\sqrt{3}/2\}),\ f^{-1}([0,1]),$$
$$f^{-1}(f(\{0\}),\ f(f^{-1}(\{0\})),\ f^{-1}(f([0,\pi/2])),\ f(f^{-1}([0,1])).$$

Exercice 13.2 (★★)

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2+z+1 \end{array}$.

1. Déterminer $f(\mathbb{C})$, $f(\mathbb{C}^*)$ et $f(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{C})$, $f^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.

1. Rappelons que $f(\mathbb{C}) = \mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des complexes qui possèdent au moins un antécédent par f. Mais pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, l'équation $f(z) = \alpha$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, est une équation polynomiale de degré 2, qui possède donc au moins une solution. Et donc α possède au moins un antécédent par f, et donc est dans $f(\mathbb{C})$. Ainsi, $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

   $f(\mathbb{C}^*)$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}$ qui possèdent au moins un antécédent non nul par f. Puisque $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{C}$ et que $f(0) = 1$, le seul complexe susceptible de ne pas avoir d'antécédent non nul est 1. Or les antécédents de 1 par f sont 0 et -1. Puisque $-1 \in \mathbb{C}^*$, $1 = f(-1) \in f(\mathbb{C}^*)$, et donc $f(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}$.

   Enfin, $f(\mathbb{R})$ est l'ensemble des complexes qui ont au moins un antécédent réel par f. Notons que si $z \in \mathbb{R}$, alors $f(z) \in \mathbb{R}$, si bien que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = \alpha$, qui se récrit $x^2+x+(1-\alpha) = 0$, possède au moins une solution $x \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, son discriminant est positif ou nul, soit si, et seulement si :

   $$1 - 4(1-\alpha) \geq 0, \qquad \text{soit encore} \qquad \alpha \geq \frac{3}{4}.$$

   Et donc $f(\mathbb{R}) = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$.

2. Par définition, $f^{-1}(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$.

   Les seuls complexes dont l'image est nulle sont $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$ et $\bar{j}$. Et donc $f^{-1}(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}\backslash\{j,\bar{j}\}$.

   Par définition, $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathbb{R}\}$. Soit alors $z = a+ib$ un complexe sous forme algébrique (avec $a, b \in \mathbb{R}$). Alors :

   $$f(z) \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ z^2+z+1 \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ z^2+z \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Im}\left(z^2+z\right) = 0.$$

Mais :

$$\operatorname{Im}\left(z^2+z\right)=\operatorname{Im}\left(z^2\right)+\operatorname{Im}(z)=2ab+b.$$

Et donc :

$$\begin{aligned} z\in f^{-1}(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow 2ab+b=0 \Leftrightarrow b(2a+1)=0 \Leftrightarrow b=0 \text{ ou } a=-\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\cup\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,\operatorname{Re}(z)=-\frac{1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}\cup\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,\operatorname{Re}(z)=-\frac{1}{2}\right\}$.

Exercice 13.3 (★★)

Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E.

1. Déterminer les fonctions caractéristiques de $\overline{A}$, $A\cap B$, $A\cup B$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Retrouver à l'aide des fonctions indicatrices que $A\cap B=A\cup B\Leftrightarrow A=B$.

Exercice 13.4 (★★★)

Soit $f:E\to F$. Prouver que pour tous $A,A'\in\mathscr{P}(E)$ et $B,B'\in\mathscr{P}(F)$:

(1) $A\subset f^{-1}(f(A))$ et $f\left(f^{-1}(B)\right)\subset B$. A-t-on égalité ?

(2) $f\left(A\cup A'\right)=f(A)\cup f\left(A'\right)$ et $f\left(A\cap A'\right)\subset f(A)\cap f\left(A'\right)$. A-t-on égalité ?

(3) $f^{-1}\left(B\cup B'\right)=f^{-1}(B)\cup f^{-1}\left(B'\right)$ et $f^{-1}\left(B\cap B'\right)=f^{-1}(B)\cap f^{-1}\left(B'\right)$.

Injections, surjections, bijections

Exercice 13.5 (★)

Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives :

$f_1:\ x\mapsto x+\dfrac{1}{x}$ de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$;

$f_2:\ x\mapsto x+\dfrac{1}{x}$ de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$;

$f_3:\ (x,y)\mapsto x-y^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$;

$f_4:\ (x,y)\mapsto(x-y,-2x+2y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$;

$f_5:\ (x,y,z)\mapsto(x+2y+z,y,-x-4y+z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$;

$f_6:\ n\mapsto\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair}\\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 13.6 (★)

Soient $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}\\ n & \mapsto & 2n\end{array}$ et $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ définie par $g(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair}\\ 0 & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$. Calculer $g\circ f$ puis $f\circ g$. f et g sont-elles bijectives ?

Exercice 13.7 (★★)
Soit $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{U}$. Considérons $f_a : z \mapsto \dfrac{z+a}{\overline{a}z+1}$.

1. Montrer que f_a est définie sur $\mathbb{U}$ et à valeurs dans $\mathbb{U}$.
2. Montrer que f_a est bijective de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$ et déterminer sa réciproque.

Exercice 13.8 (★★)
Soit $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. On considère l'application $h : E \to F \times G$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad h(x) = (f(x), g(x)).$$

1. Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.
2. On suppose f et g surjectives, h est-elle surjective ?

Exercice 13.9 (★★)
Soient E, F, G trois ensembles non vides et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

Exercice 13.10 (★★)
Soit E un ensemble et f une application de E vers E.

1. Supposons que $f \circ f = f$. Montrer que si f est injective ou surjective, alors $f = \mathrm{id}_E$.
2. Supposons que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 13.11 (★★)
Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

1. Supposons f injective. Montrer que pour tout $M, N \in \mathscr{P}(E)$, $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$.
2. Réciproquement, montrer que si pour tout $M, N \in \mathscr{P}(E)$, $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$, alors f est injective.

Exercice 13.12 (★★★)
Soient E et F deux ensembles, et f une application de E vers F.

1. Montrer que f est injective si, et seulement si, pour tout $A \subset E$, $A = f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que f est surjective si, et seulement si, pour tout $B \subset F$, $B = f(f^{-1}(B))$.
3. (★) On considère les applications :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(F) & \to & \mathscr{P}(E) \\ B & \mapsto & f^{-1}(B) \end{array} \right. .$$

   Montrer les équivalences suivantes :

   (i) f injective $\Leftrightarrow$ φ injective $\Leftrightarrow$ ψ surjective ;
   (ii) f surjective $\Leftrightarrow$ φ surjective $\Leftrightarrow$ ψ injective.

1. Fait en TD.

2. Fait en TD.

3. (i) Supposons f injective. On a démontré à la première question qu'alors :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad A = f^{-1}(f(A)), \quad \text{soit} \quad \psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}.$$

L'application $\mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$ étant bijective, il suit que ψ est surjective et φ est injective.

Supposons φ injective. Montrons que f est injective. Soit pour cela $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors :

$$\varphi(\{x_1\}) = \varphi(\{x_2\}).$$

Par injectivité de φ, $\{x_1\} = \{x_2\}$, et $x_1 = x_2$. On a ainsi montré la première équivalence.

Supposons ψ surjective, et montrons que f est injective. Soit encore $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Montrons que $x_1 = x_2$.

Par surjectivité de ψ, il existe $B \in \mathscr{P}(F)$ tel que $\psi(B) = \{x_1\}$, soit $f^{-1}(B) = \{x_1\}$. Mais alors $x_1 \in f^{-1}(B)$, et donc $f(x_2) = f(x_1) \in B$, donc x_2 appartient à $f^{-1}(B) = \{x_1\}$. D'où $x_1 = x_2$ et l'injectivité de f. On a ainsi montré la deuxième équivalence.

(ii) Supposons f surjective. On a démontré à la deuxième question qu'alors :

$$\forall B \in \mathscr{P}(F), \quad B = f(f^{-1}(B)), \quad \text{soit} \quad \varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(F)}.$$

L'application $\mathrm{id}_{\mathscr{P}(F)}$ étant bijective, il suit que φ est surjective et ψ est injective.

Supposons φ surjective. Montrons que f est surjective. Soit pour cela $y \in F$, et considérons $B = \{y\}$. Par surjectivité de φ, il existe $A \in \mathscr{P}(E)$ tel que $\varphi(A) = \{y\}$, ce qui se récrit $f(A) = \{y\}$. En particulier, $A \neq \emptyset$ et pour tout $x \in A$, $f(x) \in f(A) = \{y\}$, de sorte que $f(x) = y$. D'où la surjectivité de f.

Supposons ψ injective, et montrons la surjectivité de f. Soit $y \in F$. Il s'agit de montrer que $\psi(\{y\}) = f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset = \psi(\emptyset)$. Or cette propriété est bien satisfaite par injectivité de ψ. D'où la surjectivité de f.

On a ainsi montré toutes les équivalences voulues.

Exercice 13.13 (★★★)

Soient E et F deux ensembles. Montrer qu'il existe une application injective de E dans F si, et seulement si, il existe une application surjective de F dans E.

Supposons qu'il existe une application injective $f : E \to F$. Alors $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} E & \to & B = \mathrm{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est bijective, car injective puisque f l'est, et surjective car tout élément de $\mathrm{Im}(f)$ admet un antécédent par f, et donc par $\tilde{f}$. Elle admet donc une bijection réciproque $\tilde{f}^{-1} : B \to E$.

Fixons arbitrairement un élément $a \in E$, et considérons l'application suivante :

$$g : \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ y & \mapsto & \begin{cases} \tilde{f}^{-1}(y) & \text{si } y \in B \\ a & \text{si } y \in \overline{B} \end{cases} \end{array}.$$

Montrons que g est surjective. Prenons pour cela $x \in E$. Puisque $\tilde{f} : E \to B$ est bijective, $x = \tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(x)) = g(f(x))$. Ainsi x admet un antécédent par g : g est bien surjective.

Supposons à présent qu'il existe une surjection g de F dans E. Pour tout x dans E, il existe donc $y_x \in F$ tel que $x = g(y_x)$. Considérons alors l'application $f : x \in E \mapsto y_x \in F$, et montrons que f est injective. Soient pour cela $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $y_{x_1} = y_{x_2}$, et en appliquant g, $x_1 = g(y_{x_1}) = g(y_{x_2}) = x_2$. Donc f définit bien une injection de E dans F.

Exercice 13.14 (★★★)

Soit E et F deux ensembles et f une application de E vers F. On définit la relation $\mathscr{R}$ sur E en posant :

$$x\mathscr{R}y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y).$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E. Décrire les classes d'équivalence de cette relation.

2. Notons $E/\mathscr{R}$ l'ensemble des classes d'équivalences pour la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ et considérons l'application :

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} E/\mathscr{R} & \to & F \\ \overline{x} & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

   (a) Montrer que l'application $\tilde{f}$ est bien définie, c'est-à-dire que l'image de $\overline{x}$ par $\tilde{f}$ ne dépend pas du représentant choisi dans la classe de $\overline{x}$.

   (b) Montrer que $\tilde{f}$ est une application injective.

Exercice 13.15 (★★★)

Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. On considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective (resp. surjective, resp. bijective).

2. Dans le cas où f est bijective, déterminer son application réciproque.

Une correction en vidéo.

Exercice 13.16 (★★★★)

Soit $f : E \to F$.

1. Montrer que pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$, $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.
2. Montrer que f est bijective si, et seulement si, pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

1. Soit $x \in E$. Alors :

$$x \in \overline{f^{-1}(B)} \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow f(x) \in \bar{B} \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\bar{B}).$$

D'où l'égalité souhaitée.

2. Procédons par double implication.

- Supposons dans un premier temps que f soit bijective, et soit $A \in \mathscr{P}(E)$.

  Soit alors $y \in \overline{f(A)}$. Alors y admet un unique antécédent par f, qui est $x = f^{-1}(y)$. Nécessairement, x ne peut être dans A, faute de quoi on aurait $y = f(x) \in f(A)$. Donc $x \in \bar{A}$, et par conséquent, $y = f(x) \in f(\bar{A})$. Ceci prouve donc déjà que $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$.

  De même, soit $y \in f(\bar{A})$. Alors l'unique antécédent de y est $x = f^{-1}(y)$, qui par hypothèse est dans $\bar{A}$. Donc f ne peut pas être l'image d'un élément de A, car cet élément serait nécessairement $x \notin A$. Donc $y \in \overline{f(A)}$, de sorte que $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.

  Par double inclusion, on a donc $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.

- Inversement, supposons que pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$. En particulier, pour $A = \emptyset$, on obtient

$$f(\bar{\emptyset}) = \overline{f(\emptyset)} = \bar{\emptyset} \Leftrightarrow f(E) = F.$$

  Donc déjà, f est surjective.

  Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Soit alors $A = \{x\}$, de sorte que $f(A)$ est le singleton $\{f(x)\}$. Alors $f(\bar{A}) = \overline{f(A)} = F \backslash \{f(x)\}$. Puisque $f(y) = f(x) \notin F \backslash \{f(x)\}$, on en déduit que $f(y) \notin f(\bar{A})$. Et donc y, qui est un antécédent de $f(y)$, ne peut appartenir à $\bar{A}$, et donc appartient à A. Mais A ne contient qu'un élément, qui est x, de sorte que $y = x$.

  Et donc f est injective, et par conséquent bijective.

Exercice 13.17 (★★★★ - Oral Polytechnique 2017)

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que $f + f \circ f + f \circ f \circ f = 3\mathrm{id}$.

Il est évident que $\mathrm{id}_{\mathbb{N}^*}$ convient.

Soit f une application de $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ vérifiant la condition requise. Alors :

$$(\mathrm{id} + f + f^2) \circ f = 3\mathrm{id}$$

est injective. Et donc f est injective.

Montrons par récurrence forte sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k) = k$.

$\boxed{\textbf{I}}$ Par hypothèse :

$$f(1) + f(f(1)) + f(f(f(1))) = 3.$$

Or, chacun des entiers $f(1), f^2(1)$ et $f^3(1)$ est supérieur ou égal à 1, et donc ils sont nécessairement tous trois égaux à 1. Et en particulier, $f(1) = 1$, ce qui initialise la récurrence.

$\boxed{\textbf{H}}$ Supposons que pour tout $n \leq k$, $f(n) = n$. Alors :

$$f(k+1) + f^2(k+1) + f^3(k+1) = 3(k+1).$$

Puisque f est injective, et que $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, ..., $f(k) = k$, alors $f(k+1) \geqslant k+1$. Et donc, toujours par injectivité de f, $f(f(k+1)) \geq k+1$ et $f(f(f(k+1))) \geq k+1$. Par conséquent, on doit avoir $f(k+1) = k+1$, $f(f(k+1)) = k+1$ et $f(f(f(k+1))) = k+1$. Et puisque $f(k+1) = k+1$, nous venons de prouver l'hérédité.

Par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k) = k$, et donc $f = \mathrm{id}$.

Ainsi, $f = \mathrm{id}$ est la seule application vérifiant la relation demandée.