TD2

Ensembles

Exercice 2.1 (★★)

Montrer les égalités d'ensembles suivantes :

1. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x-y=1\} = \{(t+1,4t+3),\ t\in\mathbb{R}\}$;
2. $\{(\lambda,2\mu-\lambda,2\lambda+\mu),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\} = \{(2x,2y,5x+y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$;
3. $]-1,1[= \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$;
4. $[-1,1] = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right[$.

Exercice 2.2 (★)

Soient E et F deux ensembles. Montrer que $\mathscr{P}(E)\subset\mathscr{P}(F)$ si, et seulement si, $E\subset F$.

Exercice 2.3 (★★)

Soient E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. Comparer les ensembles suivants :

1. $\mathscr{P}(A\cap B)$ et $\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)$;
2. (★) $\mathscr{P}(A\cup B)$ et $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)$.

Exercice 2.4 (★★)

Soient E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $A\subset B$;
(ii) $A\cap B=A$;
(iii) $A\cup B=B$;
(iv) $A\cap\overline{B}=\emptyset$.

Exercice 2.5 (★★)

Soit E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E. Montrer que :

(i) $A\cup B=A\cap C \Leftrightarrow B\subset A\subset C$;
(ii) $A\cup B=A\cap B \Leftrightarrow A=B$;
(iii) $A\cap B=A\cap C$ et $A\cup B=A\cup C \Leftrightarrow B=C$;
(iv) $\overline{A}\setminus\overline{B}=B\setminus A$;
(v) $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)=A\setminus(B\cap C)$;
(vi) $(A\setminus B)\setminus(A\setminus C)=(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus B$.

Exercice 2.6 (★★)

Soit E un ensemble, et soient A et B deux parties de E.

1. Montrer l'équivalence : $A\subset B \Leftrightarrow \forall X\in\mathscr{P}(E),\ A\cap X\subset B\cap X$.
2. Montrer l'équivalence : $A\cup B=E \Leftrightarrow \forall X\in\mathscr{P}(E),\ (X\cap A=\emptyset\Rightarrow X\subset B)$.

1. Supposons que $A \subset B$, et soit $X \in \mathscr{P}(E)$.

   On souhaite alors prouver que $A \cap X \subset B \cap X$. Soit donc $x \in A \cap X$. Alors $x \in A$ et $x \in X$. Or $A \subset B$, donc $x \in B$, et donc $x \in B \cap X$.

   Ainsi, on a prouvé que $\forall x \in A \cap X$, $x \in B \cap X$, si bien que $A \cap X \subset B \cap X$. Et ceci est vrai pour toute partie X de E.

   Nous avons donc prouvé l'implication $A \subset B \Rightarrow \forall X \in \mathscr{P}(E), A \cap X \subset B \cap X$.

   Inversement, supposons que $\forall X \in \mathscr{P}(E)$, $A \cap X \subset B \cap X$. Alors en particulier pour $X = E$, on a $A \cap E \subset B \cap E \Leftrightarrow A \subset B$. Et donc $\forall X \in \mathscr{P}(E), A \cap X \subset B \cap X \Rightarrow A \subset B$.

2. Supposons que $A \cup B = E$, et soit $X \in \mathscr{P}(E)$ vérifiant $X \cap A = \emptyset$. Alors :

   $$X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = \underbrace{(X \cap A)}_{=\emptyset} \cup (X \cap B) = X \cap B \subset B.$$

   Et donc on a bien prouvé que $\forall X \in \mathscr{P}(E), X \cap A = \emptyset \Rightarrow X \subset B$.

   Inversement, supposons que $\forall X \in \mathscr{P}(E), X \cap A = \emptyset \Rightarrow X \subset B$. Prenons alors en particulier, $X = \bar{A}$. On a alors $A \cap \bar{A} = \emptyset$, et donc $\bar{A} \subset B$. Et alors $E = A \cup \bar{A} \subset A \cup B$.

   Puisque A et B sont deux parties de E, on a évidemment $A \cup B \subset E$, et donc par double inclusion, $E = A \cup B$.

   Nous avons donc prouvé que $(\forall X \in \mathscr{P}(E), X \cap A = \emptyset \Rightarrow X \subset B) \Rightarrow A \cup B = E$. Donc par double implication,

   $$A \cup B = E \quad \Leftrightarrow \quad (\forall X \in \mathscr{P}(E), X \cap A = \emptyset \Rightarrow X \subset B).$$

Exercice 2.7 (★★ - Différence symétrique)

Soit E un ensemble. On définit la *différence symétrique* de deux parties A, B de E par :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Montrer que pour tout $A, B \in \mathscr{P}(E)$, $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$.
2. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Calculer $A \Delta A$, $A \Delta \overline{A}$, $A \Delta E$ et $A \Delta \emptyset$.
3. Montrer que : $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)$, $A \Delta B = B \Delta A$ et $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.
4. Montrer que : $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)$, $A \Delta B = \overline{A} \Delta \overline{B}$.
5. Montrer que : $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)$, $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$.
6. Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Résoudre l'équation $X \Delta A = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

Exercice 2.8 (★★★)

Soient E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$:

(i) $X \cup A = B$; (ii) $X \cap A = B$; (iii) $X \setminus A = B$.

(i) Fait en TD.

(ii) Pour que l'équation $X \cap A = B$ admette une solution X, il faut que $B \subset X \cap A \subset A$. Ainsi, si $B \not\subset A$, cette équation n'admet pas de solution

Supposons dans la suite que $B \subset A$, et raisonnons par Analyse - Synthèse.

- **Analyse.** Soit $X \subset E$ tel que $X \cap A = B$. Alors :
$$B = X \cap A \subset X.$$
D'autre part, on remarquera avec un diagramme de Venn que si $X \cap A = B$, alors $X \setminus B \subset \overline{A}$. Montrons le par le calcul :
$$X \cap \overline{B} = X \cap \overline{(X \cap A)} = X \cap (\overline{X} \cup \overline{A}) = (X \cap \overline{X}) \cup (X \cap \overline{A}) = \emptyset \cup (X \cap \overline{A}) = X \cap \overline{A} \subset \overline{A}.$$
- **Synthèse.** Soit $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $B \subset X$ et $X \setminus B \subset \overline{A}$. Montrons que $X \cap A = B$.
  - Puisque $B \subset A$, il suit que $B \subset X \cap A$.
  - D'autre part, soit $x \in X \cap A$. Si $x \notin B$, alors $x \in X \setminus B \subset \overline{A}$, et donc $x \in \overline{A} \cap A = \emptyset$, d'où une contradiction. Donc x appartient à B.

  Ainsi, $X \cap A = B$.

(iii) Cette équation se récrit :
$$X \cap \overline{A} = B.$$
On est donc ramené à la question précédente avec $\overline{A}$ en lieu et place de A. Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
$$\{X \in \mathscr{P}(E) \mid B \subset X \text{ et } (X \setminus B) \subset A\}.$$

Exercice 2.9 (★★)

Montrer que $\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ n'est pas le produit cartésien de deux ensembles de $\mathbb{R}$.

Procédons par l'absurde en supposant que $\mathscr{C} = A \times B$ où A et B sont des parties de $\mathbb{R}$. Puisque $(1, 0) \in \mathscr{C}$, $(1, 0) \in A \times B$ et donc $1 \in A$. De même $(0, 1) \in \mathscr{C}$, et donc $1 \in B$. Par conséquent, on aurait $(1, 1) \in A \times B = \mathscr{C}$, ce qui est faux.

Exercice 2.10 (★★)

Soient A, B, C, D des parties d'un ensemble E.

1. Montrer que $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.
2. Montrer que $(A \times C) \cup (A \times D) = A \times (C \cup D)$.
3. Que dire des ensembles $(A \times C) \cup (B \times D)$ et $(A \cup B) \times (C \cup D)$?

Exercice 2.11 (★★★)

Soient E un ensemble, n un entier naturel non nul et $A_0, A_1, \ldots, A_n$ des sous-ensembles de E tels que
$$\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \ldots \subsetneq A_n = E.$$

On pose pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$. Montrer que $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ est une partition de E.

Exercice 2.12 (★★)

Soient E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E.

1. Déterminer les fonctions caractéristiques de $\overline{A}, A \cap B, A \cup B$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Retrouver, à l'aide des fonctions indicatrices, que $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.

> 1. Vérifions les égalités suivantes :
>
> $$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A, \quad \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B, \quad \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B.$$
>
> Toutes ces applications ont même ensemble de départ E et même ensemble d'arrivée $\{0, 1\}$. De plus, pour tout $x \in E$:
>
> $$1 - \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 - 1 = 0 & \text{si } x \in A \\ 1 - 0 = 1 & \text{si } x \notin A \end{cases} = \mathbb{1}_{\overline{A}}(x).$$
>
> De même :
>
> $$\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = \begin{cases} 1 \times 1 = 1 & \text{si } x \in A \text{ et } x \in B \\ 1 \times 0 = 0 & \text{si } x \in A \text{ et } x \notin B \\ 0 \times 1 = 0 & \text{si } x \notin A \text{ et } x \in B \\ 0 \times 0 = 0 & \text{si } x \notin A \text{ et } x \notin B \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \cap B \\ 0 & \text{si } x \notin A \cap B \end{cases} = \mathbb{1}_{A\cap B}(x).$$
>
> On procèdera de manière analogue pour la dernière égalité.
>
> 2. Notons tout d'abord que si A et B sont deux parties de E, alors on a l'équivalence :
>
> $$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \quad \Leftrightarrow \quad A = B.$$
>
> En effet, pour l'implication directe, si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$, alors :
>
> $$x \in A \;\Leftrightarrow\; \mathbb{1}_A(x) = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathbb{1}_B(x) = 1 \;\Leftrightarrow\; x \in B$$
>
> et donc $A = B$. L'implication réciproque est elle évidente.
>
> Utilisons ce résultat ici :
>
> $$\begin{aligned} A \cap B = A \cup B &\;\Leftrightarrow\; \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_{A\cup B} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \\ &\;\Leftrightarrow\; 0 = \mathbb{1}_A^2 + \mathbb{1}_B^2 - 2\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \\ &\;\Leftrightarrow\; 0 = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2 \;\Leftrightarrow\; 0 = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B \\ &\;\Leftrightarrow\; \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \;\Leftrightarrow\; A = B. \end{aligned}$$

Exercice 2.13 (★★★)

Soit E un ensemble et soient $E_1, \dots, E_n$ $(n \geq 2)$ des parties deux à deux distinctes de E. Montrer que l'un au moins de ces ensembles n'en contient aucun autre.

Juste pour le plaisir, et bien que ceci ne nous soit pas vraiment utile dans la suite, reformulons l'énoncé : il s'agit de prouver que

$$\exists i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!]\backslash\{i\},\ E_j \not\subset E_i.$$

Nous allons prouver le résultat par récurrence sur n, le nombre d'ensembles. Autrement dit, nous prouvons la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante : « quelles que soient $E_1,\dots,E_n$ des parties deux à deux distinctes de E, il en existe une qui ne contienne aucune des autres. » Notons que là encore, il peut être instructif d'essayer d'écrire $\mathscr{P}(n)$ à l'aide de quantificateurs :

$$\forall\,(E_1,\dots E_n) \in \mathscr{P}(E)^n, \left(\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow E_i \neq E_j\right) \Rightarrow \left(\exists i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,n]\!]\backslash\{i\}, E_j \not\subset E_i\right).$$

- **Initialisation.** Pour $n = 2$, donnons nous deux parties E_1, E_2 de E distinctes. Alors on ne peut avoir à la fois $E_1 \subset E_2$ et $E_2 \subset E_1$, car alors on aurait $E_1 = E_2$, contredisant le fait que $E_1 \neq E_2$.

  Donc on a toujours soit E_1 qui ne contient pas E_2, soit E_2 qui ne contient pas E_1.

- **Hérédité.** Soit $n \geq 2$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, et considérons $E_1,\dots,E_{n+1}$ des parties distinctes de E.

  Par hypothèse de récurrence, l'un des $E_1,\dots,E_n$, appelons-le E_i, ne contient aucun des autres. Il y a alors deux cas possibles :

  - Si $E_{n+1} \not\subset E_i$, alors aucun des $E_1,\dots,E_{i-1},E_{i+1},\dots,E_{n+1}$ n'est contenu dans E_i.
  - Si $E_{n+1} \subset E_i$, alors E_{n+1} ne contient aucun des $E_k, k \in [\![1,n]\!]$. En effet, pour $k \neq i$, si on avait $E_k \subset E_{n+1}$, comme $E_{n+1} \subset E_i$, on aurait également $E_k \subset E_i$, ce qui contredit la définition de i. Et pour $k = i$, on ne peut avoir $E_i \subset E_{n+1}$ car on a déjà $E_{n+1} \subset E_i$, et par hypothèse $E_i \neq E_{n+1}$ car $E_1,\dots,E_{n+1}$ sont deux à deux distincts.. Et donc E_{n+1} ne contient aucun des ensembles $E_1,\dots,E_n$.

  Ainsi, dans tous les cas, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$. Et donc, pour toute famille finie de parties deux à deux distinctes de E, l'une [4] de ces parties (au moins) n'en contient aucune autre.

Exercice 2.14 (★★★★ - Axiomes de Peano et construction des entiers de Von Neumann)
Dans le cadre de la théorie axiomatique des ensembles (assez différente de la théorie « naïve » des ensembles que nous manipulerons en prépa), on considère que tout objet mathématique est un ensemble, et les règles de manipulation de ces ensembles sont constituée de 8 axiomes qu'il est hors de question d'énoncer ici.

L'un des axiomes les plus difficiles à appréhender, l'axiome de fondation, dit que si x est un ensemble non vide, alors il existe $y \in x$ tel que $y \cap x = \emptyset$.

1. Montrer qu'il n'existe pas deux ensembles a et b tels que $a \in b$ et $b \in a$. *Considérer $x = \{a,b\}$ et utiliser l'axiome de fondation.*

Pour tout ensemble a, on notera $s(a) = a \cup \{a\}$, ensemble que l'on appellera le successeur de a.
Un ensemble A est dit clos par successeur si $\forall a \in A, s(a) \in A$.
L'axiome de l'infini, qui comme son nom l'indique, a pour but de garantir l'existence d'un ensemble infini, s'énonce comme suit : il existe un ensemble X tel que $\emptyset \in X$ et $\forall x \in X, s(x) \in X$.
Autrement dit, il existe un ensemble X contenant le vide et clos par successeur.

On souhaite alors mettre en évidence l'existence d'un ensemble qui serait « une copie de **N** », c'est-à-dire vérifiant l'intuition qu'on se fait des entiers.

Dans la suite, notons X un ensemble contenant $\emptyset$ et clos par successeur (dont l'existence est garantie par l'axiome de l'infini), notons Y l'ensemble des parties de X qui contiennent $\emptyset$ et sont closes par successeur, et enfin notons $N = \bigcap_{A \in Y} A$.

Dans la suite, on note 0 l'ensemble vide.

2. Montrer que N possède les propriétés suivantes :
   (a) $0 \in N$ et $\forall n \in N$, $s(n) \in N$;
   (b) $\forall n \in N$, $s(n) \neq 0$ (0 n'est successeur d'aucun élément de N) ;
   (c) $\forall m, n \in N$, $(s(m) = s(n)) \Rightarrow m = n$;
   (d) $\forall A \in \mathscr{P}(N)$, $(0 \in A$ et $\forall n \in A$, $s(n) \in A) \Rightarrow A = N$.

   Ces propriétés réunies (appelées les axiomes de Peano) nous semblent caractéristiques de $\mathbb{N}$ (ou d'une copie de $\mathbb{N}$), dans lequel l'application successeur serait $s : n \mapsto n + 1$.

1. Supposons donc par l'absurde que deux tels ensembles a et b existent, et considérons $x = \{a, b\}$.

   Mais si $y = a$, alors $b \in x \cap a = x \cap y$, et donc $x \cap y \neq \emptyset$. Et de même, si $y = b$, alors $a \in x \cap b = x \cap y$, si bien que $x \cap y \neq \emptyset$. Autrement dit, nous venons de prouver que $\forall y \in x$, $y \cap x \neq \emptyset$, contredisant l'axiome de fondation.

   Donc il n'existe pas d'ensembles a, b tels que $a \in b$ et $b \in a$.

2. (a) Puisque $0 = \emptyset$ appartient par définition à tous les $A \in Y$, $0 \in N$.
   Et par ailleurs, si $n \in N$, alors pour tout $A \in Y$, puisque A est clos par successeur, $s(n) \in A$. Et donc $s(n) \in \bigcup_{A \in Y} A$, si bien que $s(n) \in N$. Ceci prouve donc (a).

   (b) Pour tout $n \in N$, $s(n) = n \cup \{n\}$. Mais puisque $n \in \{n\}, n \in s(n)$, si bien que $s(n) \neq \emptyset$. Et donc pour tout $n \in N, s(n) \neq 0$.

   (c) Soient $m, n \in N$ tels que $s(m) = s(n)$. Alors $n \cup \{n\} = m \cup \{m\}$.
   Puisque $n \in s(n)$, on a donc $n \in s(m)$, et donc soit $n \in \{m\}$ (auquel cas $m = n$), soit $n \in m$. De même, $m \in s(m)$, et donc $m \in s(n)$, si bien que $m \in \{n\}$ ou $m \in n$. Si on suppose de plus que $m \neq n$, on a donc $m \in n$ et $n \in m$, ce qui n'est pas possible par la question 1).
   Donc nécessairement $m = n$, si bien que $s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$.

   (d) Soit A une partie de N telle que $0 \in A$ et pour tout $n \in A, s(n) \in A$. Autrement dit, A est une partie de N contenant 0 et close par successeur, et donc $A \in Y$.
   Et donc $N \subset A$. Puisque par définition $A \subset N$, on a donc $N = A$.