TD2

Ensembles

Exercice 2.1 (★★)

Montrer les égalités d'ensembles suivantes :

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\} = \{(t+1, 4t+3),\ t \in \mathbb{R}\}$;
2. $\{(\lambda, 2\mu - \lambda, 2\lambda + \mu),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\} = \{(2x, 2y, 5x+y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$;
3. $]-1,1[= \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$;
4. $[-1,1] = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$.

Exercice 2.2 (★)

Soient E et F deux ensembles. Montrer que $\mathscr{P}(E) \subset \mathscr{P}(F)$ si, et seulement si, $E \subset F$.

Exercice 2.3 (★★)

Soient E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. Comparer les ensembles suivants :

1. $\mathscr{P}(A \cap B)$ et $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.
2. (★) $\mathscr{P}(A \cup B)$ et $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$;

Exercice 2.4 (★★)

Soient E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $A \subset B$;

(ii) $A \cap B = A$;

(iii) $A \cup B = B$;

(iv) $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Exercice 2.5 (★★)

Soit E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E. Montrer que :

(i) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$;

(ii) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$;

(iii) $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C \Leftrightarrow B = C$;

(iv) $\overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus A$;

(v) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$;

(vi) $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$.

Exercice 2.6 (★★)

Soit E un ensemble, et soient A et B deux parties de E.

1. Montrer l'équivalence : $A \subset B \iff \forall X \in \mathscr{P}(E),\ A \cap X \subset B \cap X$.
2. Montrer l'équivalence : $A \cup B = E \iff \forall X \in \mathscr{P}(E),\ (X \cap A = \emptyset \Rightarrow X \subset B)$.

Exercice 2.7 (★★ - Différence symétrique)
Soit E un ensemble. On définit la *différence symétrique* de deux parties A, B de E par :

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Montrer que pour tout $A, B \in \mathscr{P}(E)$, $A\Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$.
2. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\overline{A}$, $A\Delta E$ et $A\Delta\emptyset$.
3. Montrer que : $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)$, $A\Delta B = B\Delta A$ et $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.
4. Montrer que : $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)$, $A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$.
5. Montrer que : $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)$, $A\Delta B = A\Delta C \Leftrightarrow B = C$.
6. Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Résoudre l'équation $X\Delta A = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

Exercice 2.8 (★★★)
Soient E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$:

(i) $X \cup A = B$; (ii) $X \cap A = B$; (iii) $X \setminus A = B$.

Exercice 2.9 (★★)
Montrer que $\mathscr{C} = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$ n'est pas le produit cartésien de deux ensembles de $\mathbb{R}$.

Exercice 2.10 (★★)
Soient A, B, C, D des parties d'un ensemble E.

1. Montrer que $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.
2. Montrer que $(A \times C) \cup (A \times D) = A \times (C \cup D)$.
3. Que dire des ensembles $(A \times C) \cup (B \times D)$ et $(A \cup B) \times (C \cup D)$?

Exercice 2.11 (★★★)
Soient E un ensemble, n un entier naturel non nul et $A_0, A_1, \ldots, A_n$ des sous-ensembles de E tels que

$$\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \ldots \subsetneq A_n = E.$$

On pose pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$. Montrer que $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ est une partition de E.

Exercice 2.12 (★★)
Soient E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E.

1. Déterminer les fonctions caractéristiques de $\overline{A}, A \cap B, A \cup B$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Retrouver, à l'aide des fonctions indicatrices, que $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 2.13 (★★★)

Soit E un ensemble et soient $E_1, \ldots, E_n$ ($n \geq 2$) des parties deux à deux distinctes de E. Montrer que l'un au moins de ces ensembles n'en contient aucun autre.

Exercice 2.14 (★★★★ - Axiomes de Peano et construction des entiers de Von Neumann)

Dans le cadre de la théorie axiomatique des ensembles (assez différente de la théorie « naïve » des ensembles que nous manipulerons en prépa), on considère que tout objet mathématique est un ensemble, et les règles de manipulation de ces ensembles sont constituée de 8 axiomes qu'il est hors de question d'énoncer ici.

L'un des axiomes les plus difficiles à appréhender, l'axiome de fondation, dit que si x est un ensemble non vide, alors il existe $y \in x$ tel que $y \cap x = \emptyset$.

1. Montrer qu'il n'existe pas deux ensembles a et b tels que $a \in b$ et $b \in a$. *Considérer $x = \{a, b\}$ et utiliser l'axiome de fondation.*

Pour tout ensemble a, on notera $s(a) = a \cup \{a\}$, ensemble que l'on appellera le successeur de a.
Un ensemble A est dit clos par successeur si $\forall a \in A, s(a) \in A$.
L'axiome de l'infini, qui comme son nom l'indique, a pour but de garantir l'existence d'un ensemble infini, s'énonce comme suit : il existe un ensemble X tel que $\emptyset \in X$ et $\forall x \in X, s(x) \in X$.
Autrement dit, il existe un ensemble X contenant le vide et clos par successeur.
On souhaite alors mettre en évidence l'existence d'un ensemble qui serait « une copie de $\mathbf{N}$ », c'est-à-dire vérifiant l'intuition qu'on se fait des entiers.

Dans la suite, notons X un ensemble contenant $\emptyset$ et clos par successeur (dont l'existence est garantie par l'axiome de l'infini), notons Y l'ensemble des parties de X qui contiennent $\emptyset$ et sont closes par successeur, et enfin notons $N = \bigcap_{A \in Y} A$.
Dans la suite, on note 0 l'ensemble vide.

2. Montrer que N possède les propriétés suivantes :

   (a) $0 \in N$ et $\forall n \in N$, $s(n) \in N$;

   (b) $\forall n \in N$, $s(n) \neq 0$ (0 n'est successeur d'aucun élément de N) ;

   (c) $\forall m, n \in N$, $(s(m) = s(n)) \Rightarrow m = n$;

   (d) $\forall A \in \mathscr{P}(N)$, $(0 \in A$ et $\forall n \in A$, $s(n) \in A) \Rightarrow A = N$.

   Ces propriétés réunies (appelées les axiomes de Peano) nous semblent caractéristiques de $\mathbb{N}$ (ou d'une copie de $\mathbb{N}$), dans lequel l'application successeur serait $s : n \mapsto n + 1$.
