TD29

Espaces probabilisés finis et variables aléatoires

Calculs de probabilités

Exercice 29.1 (★ - Paradoxe des anniversaires)

Dans un groupe de n personnes, on considère que chaque personne a autant de chance d'être née chacun des 365 jours de l'année. Quelle est la probabilité que deux personnes aient leur anniversaire le même jour ?

Un calcul numérique prouve que pour $n \geq 23$, cette probabilité est supérieure à $1/2$, et c'est ce que l'on nomme paradoxe des anniversaires. Ce n'est pas un vrai paradoxe, mais cela contredit l'intuition, car on pourrait s'attendre à ce qu'il faille bien davantage de personnes.

Exercice 29.2 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est p, avec $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?
2. Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, face ne soit jamais suivi de pile ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir le premier face au n-ème lancer ? Et le k-ème face au n-ème lancer ?

Exercice 29.3 (★★)

Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules de cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir des numéros de la même parité dans les différents cas suivants :

(i) tirage simultanément ; | (ii) tirage sans remise ; | (iii) tirage avec remise.

Exercice 29.4 (★★)

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, et $E = [\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n.

On choisit au hasard deux parties A et B de E, toutes les parties, y compris la partie vide, ayant la même probabilité d'être choisie. Calculer la probabilité de l'événement $[A \cap B = \emptyset]$.

Exercice 29.5 (★★ - Oral Centrale PC)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ boules, n blanches et n noires. On tire les boules deux par deux jusqu'à vider l'urne. Quelle est la probabilité qu'à chaque tirage on ait obtenu une boule blanche et une boule noire ?

Exercice 29.6 (★★ - Indicatrice d'Euler)

Soit $n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$ un entier naturel non nul, décomposé en produit de facteurs premiers. On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n. On se propose de montrer que :

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Soit $\Omega = [\![1, n]\!]$, muni de la probabilité uniforme.

1. Si d est un diviseur de n, on note D_d l'ensemble des multiples de d dans Ω. Calculer $P(D_d)$.
2. Montrer que $D_{p_1}, \ldots, D_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
3. En déduire la formule pour $\varphi(n)$.

Exercice 29.7 (★★★)

Une urne contient $4n+2$ boules numérotées de 1 à $4n+2$. On tire $2n+1$ boules sans remise. Quelle est la probabilité que la somme des numéros des boules tirées soit strictement supérieure à la somme des numéros des boules restantes ?

Exercice 29.8 (★★★★ - Oral Mines Ponts PSI)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On extrait ces N boules une à une sans remise. Pour $i \in [\![1, N]\!]$, le numéro i est dit bien placé s'il apparait lors du i-ème tirage. On considère :

- B_i : « le numéro i est bien placé » ;
- $E_{N,k}$: « au cours de l'expérience, exactement k numéros sont bien placés ».

1. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout événement $A_1, \ldots, A_n$:
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right).$$
3. En déduire que : $P(E_{N,0}) = \displaystyle\sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!}$.
4. Montrer la relation : $P(E_{N,k}) = \dfrac{1}{k!} P(E_{N-k,0})$.
5. Pour k fixé, montrer que la suite $(P(E_{N,k}))_{N \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Formules des probabilités totales et de Bayes

Exercice 29.9 (★★)

Deux bourses U et V contiennent respectivement deux pièces d'or et trois d'argent, quatre d'or et une d'argent. On tire une pièce de l'une des bourses choisie au hasard et on la remet dans cette même bourse. Si la pièce tirée est en or, on recommence le tirage (toujours avec remise) dans la même bourse. Dans le cas contraire, on recommence le tirage (toujours avec remise) dans l'autre bourse. On applique cette règle à chaque tirage à partir du deuxième tirage.

1. Déterminer les probabilités pour que :
   (a) les trois premiers tirages soient faits dans la bourse U ;
   (b) on tire une pièce d'argent au deuxième tirage ;
   (c) le deuxième tirage se fasse dans la bourse U sachant qu'on a tiré une pièce d'or à ce deuxième tirage.
2. Soit n un entier naturel et non nul. On note u_n la probabilité de l'événement U_n : « le n-ième tirage s'effectue dans la bourse U ».
   (a) Déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir de l'or au tirage numéro n.

Exercice 29.10 (★★ - Le concierge alcoolique)

Un concierge possède 10 clés sur son trousseau, dont une seule ouvre la porte devant laquelle il se trouve. On note A_k l'événement « la k-ème clé essayée par le concierge est la première à ouvrir la porte ».

1. Le concierge essaie les clés sans remise, calculer $P(A_k)$ pour $1 \leq k \leq 10$.
2. Le concierge essaie les clés avec remise, calculer $P(A_k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Le concierge est ivre un jour sur trois. Lorsque c'est le cas, il essaie les clés avec remise, et les autres jours, il les essaie sans remise. Calculer $P(A_k)$.

4. Aujourd'hui, il a fallu 6 essais au concierge pour ouvrir sa porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ? Même question avec 11 essais.

Exercice 29.11 (★★ - Banque CCP)
On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6 . Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 29.12 (★★)
Une puce se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si à l'instant n elle est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $n+1$, soit elle y reste avec une probabilité de $2/3$, soit elle saute sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité pour chacun de ces deux sommets. Initialement (c'est-à-dire à l'instant 0), la puce se trouve en A.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$ les événements A_n (resp. B_n, C_n) « la puce se trouve en A (resp. en B, en C) à l'instant n », et les probabilités $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. En déduire une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
2. Montrer que $6M - 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 29.13 (★★★)
On dispose de n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$, et on dispose 3 boules dans chaque urne.
Dans l'ensemble des $3n$ boules, une seule est bleue, les autres sont rouges.
Sachant que l'on a tiré sans remise deux boules rouges dans l'urne U_1, quelle est la probabilité que la boule bleue se trouve dans l'urne U_2 ?

Exercice 29.14 (★★★)
On lance une pièce de monnaie équilibrée n fois de suite de manière indépendante et on s'intéresse à l'événement E_n : « au cours des n lancers, deux Pile successifs n'apparaissent pas ». On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n la probabilité de E_n.
Trouver une relation entre p_n, p_{n-1} et p_{n-2}, et montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$.

Exercice 29.15 (★★★★ - Oral HEC)
On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet 3 descendants avec la probabilité $\frac{1}{8}$, 2 descendants avec la probabilité $\frac{3}{8}$, 1 descendant avec la probabilité $\frac{3}{8}$ et aucun descendant avec la probabilité $\frac{1}{8}$, indépendamment de ses congénères. À l'instant initial, on suppose que la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec une probabilité de $x_1 = \frac{1}{8}$.

1. Déterminer la probabilité x_2 qu'il n'y ait aucun individu à la deuxième génération.
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n la probabilité pour qu'il n'y ait aucun individu à la n-ème génération. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \frac{1}{8}x_n^3 + \frac{3}{8}x_n^2 + \frac{3}{8}x_n + \frac{1}{8}.$$
3. Étudier la suite (x_n) et montrer qu'elle converge vers $-2 + \sqrt{5}$. Interpréter ce résultat.

Variables aléatoires

Exercice 29.16 (★)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$. Déterminer la loi de $Y = n - X$.

Exercice 29.17 (★★)

1. Un (excellent) biathlète affiche 90% de réussite au tir. Une course comporte 20 tirs, et une saison comporte 18 courses à 20 tirs. On note X le nombre de 20/20 réalisés par le biathlète au cours d'une saison. Déterminer la loi de X.

2. Notre biathlète passe 10 ans sur le circuit mondial, et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de saisons où il a réalisé au moins un 20/20. Déterminer la loi de Y.

Exercice 29.18 (★★ - Urne de Polya)

Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On répète indéfiniment l'expérience suivante : on tire une boule, on la remet dans l'urne, et on ajoute une autre boule de la même couleur. Ainsi, à l'issue de la $k^{\text{ème}}$ répétition de l'expérience, l'urne contient $k+2$ boules.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du $k^{\text{ème}}$ tirage.

Montrer par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$, X_k suit la loi uniforme sur $[\![1, k+1]\!]$.

Exercice 29.19 (★★)

On choisit au hasard (et de manière équiprobable) une permutation σ de $[\![1,n]\!]$. On note alors N le plus grand entier $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(k)$. Déterminer la loi de la variable aléatoire N.

Exercice 29.20 (★★)

Une urne contient b boules blanches et b boules rouges. On y effectue une suite de tirages de la manière suivante : on replace dans l'urne la boule obtenue, en rajoutant b boules de la même couleur. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer les lois de X_1 et X_2.

2. Montrer que X_n suit la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

Exercice 29.21 (★★)

Une boite A contient deux jetons portant le numéro 0 et une boite B contient deux jetons portant le numéro 1. On tire au hasard un jeton dans chaque boite et on les échange. On recommence cette opération n fois. On note S_n la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$.

1. Déterminer la loi de S_0, S_1 et S_2.

2. Exprimer pour $i = 0, 1, 2$, $P(S_{n+1} = i)$ en fonction de $P(S_n = 0)$, $P(S_n = 1)$, $P(S_n = 2)$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(S_{n+2} = 1) = \frac{1}{2}\left(P(S_{n+1} = 1) + P(S_n = 1)\right)$.

4. En déduire la loi de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 29.22 (★★★)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note alors T la variable aléatoire égale au nombre de tirages qui ont été nécessaires.

1. Proposer un espace probabilisé (Ω, P) modélisant cette expérience et déterminer le support de T.

2. Calculer $P(T = 2)$.

3. Soit $k \in T(\Omega)$. Exprimer $P_{[T>k-1]}(T > k)$.

4. En déduire $P(T = k)$ pour tout $k \in T(\Omega)$.