

Rappels et compléments calculatoires en analyse

En vrac

Exercice 3.1 (★)

Simplifier au maximum les expressions suivantes, où x et y sont des réels non nuls et $n \in \mathbb{N}$.

1. $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$;	3. $\frac{(xy^2)^3}{(-x)^{-2}y^3}$;	5. $\frac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$;
2. $\left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^4$;	4. $\left(\frac{3}{4}\right)^{12} \left(\frac{2}{9}\right)^5$;	6. $\frac{\sqrt{75} - 1}{\sqrt{27} + \sqrt{36}}$.

Exercice 3.2 (★★)

Soit $a \in [1, +\infty[$. Simplifier : $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

Soit $a \in [1, +\infty[$. Notons $f(a)$ cette quantité, et remarquons qu'elle est bien définie car tous les termes sous les racines sont positifs. Calculons :

$$\begin{aligned} f(a)^2 &= a + 2\sqrt{a-1} + a - \sqrt{a-1} + 2\sqrt{(a + 2\sqrt{a-1})(a - 2\sqrt{a-1})} \\ &= 2a + 2\sqrt{a^2 - 4(a-1)} = 2a + 2\sqrt{(a-2)^2} \end{aligned}$$

On a alors deux cas à distinguer :

- Si $a \geq 2$, alors $\sqrt{(a-2)^2} = a-2$ et :

$$f(a)^2 = 2a + 2(a-2) = 4a - 4 = 4(a-1).$$

Puisque $f(a)$ est positif (en tant que somme de termes positifs, puisqu'une racine carré est toujours positive), on conclut dans ce cas :

$$f(a) = 2\sqrt{a-1}.$$

- Si $a < 2$, alors $\sqrt{(a-2)^2} = |a-2| = 2-a$. Dans ce cas :

$$f(a)^2 = 2a + 2(2-a) = 4.$$

Pour les mêmes raisons, on en déduit que $f(a) = 2$ dans ce cas.

Résumons :

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}} = \begin{cases} 2\sqrt{a-1} & \text{si } a \in [2, +\infty[\\ 2 & \text{si } a \in [1, 2[\end{cases}.$$

Exercice 3.3 (★★)

Prouver que :

1. pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{2x + 1 + \cos(2x)}{2 - x^2} \leq 4$;

2. pour tout $x > 0$, $\frac{xe^{-\sqrt{x}}}{\ln(x)^2 - \ln(x) + 1} \leq \frac{16e^{-2}}{3}$;
3. (★) pour tous x, y dans $[1, 2]$, $\frac{2}{5} \leq \frac{x + y^2}{x^2 + 2y - y^2} \leq 6$.

1. Nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$. Et donc :

$$0 \leq 2x \leq 2x + 1 + \cos(2x) \leq 2x + 2 \leq 4.$$

D'autre part, $0 \leq x^2 \leq 1$, donc $1 \leq 2 - x^2 \leq 2$. En passant à l'inverse, on a donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2 - x^2} \leq 1$.

Et donc en multipliant les deux inégalités (toutes formées de nombres positifs) ainsi obtenues :

$$0 \leq \frac{2x + 1 + \cos(2x)}{2 - x^2} \leq 4.$$

2. Notons φ la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $\varphi(t) = t^2 e^{-t}$, de sorte que $xe^{-\sqrt{x}} = \varphi(\sqrt{x})$. Alors φ est dérivable, de dérivée $\varphi' : t \mapsto t(2 - t)e^{-t}$.

Il est alors aisé d'en dresser le tableau de variations, et de constater que φ possède un maximum en $t = 2$, égal à $\varphi(2) = 4e^{-2}$.

Donc déjà, pour $x > 0$, $xe^{-\sqrt{x}} \leq 4e^{-2}$.

De même, soit $\psi : t \mapsto t^2 - t + 1$. On peut par étude de cette fonction montrer qu'elle admet un minimum en $1/2$ qui vaut $\psi(1/2) = 3/4$. Plus rapidement, on peut aussi se souvenir qu'une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ polynomiale de degré 2 admet un extremum en $-\frac{b}{2a}$ (maximum si $a < 0$, minimum si $a > 0$).

Et donc pour tout $x > 0$, $\ln(x)^2 - \ln(x) + 1 = \psi(\ln(x)) \geq \frac{3}{4}$. En passant à l'inverse, on a donc $\frac{1}{\ln(x)^2 - \ln(x) + 1} \leq \frac{4}{3}$.

Il ne reste alors qu'à multiplier les inégalités pour conclure : pour $x > 0$, $\frac{xe^{-\sqrt{x}}}{\ln(x)^2 - \ln(x) + 1} \leq \frac{16e^{-2}}{3}$.

3. **Méthode 1.** Essayons d'adopter une approche similaire à celle employée à la question précédente : $1 \leq y^2 \leq 4$ et donc $3 \leq 2x + y^2 \leq 6$.

De même, $1 \leq x^2 \leq 4$ et $2 \leq 2y \leq 4$ et $-4 \leq -y^2 \leq -1$.

On en déduit que $-1 \leq x^2 + 2y - y^2 \leq 7$.

On réalise alors que notre minoration est trop « brutale », puisqu'on souhaiterait n'avoir que des nombres positifs à la fin. Proposons donc une autre méthode.

Méthode 2. Essayons d'être plus subtils en étudiant la fonction f définie sur $[1, 2]$ par $f(y) = 2y - y^2$. Sa dérivée est $f'(y) = 2 - 2y = 2(1 - y) \leq 0$. Donc f est décroissante sur $[1, 2]$ et admet donc un maximum en 1, qui vaut $f(1) = 1$ et un minimum en 2 qui vaut $f(2) = 0$. Donc pour tout $y \in [1, 2]$, $0 \leq 2y - y^2 \leq 1$.

On en déduit que $1 \leq x^2 + 2y - y^2 \leq 5$, et donc $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x^2 + 2y - y^2} \leq 1$.

Enfin, en multipliant par l'encadrement du numérateur précédemment obtenu :

$$\frac{2}{5} \leq \frac{x + y^2}{x^2 + 2y - y^2} \leq 6.$$

Exercice 3.4 (★★)

1. Montrer que l'ensemble E suivant est borné : $E = \{\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}\}$.
2. Les parties de \mathbb{R} suivantes sont-elles minorées, majorées ? Admettent-elles un maximum ou un minimum ?

$$A = \left\{ \frac{n}{mn+1}, (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}, \quad B = \left\{ \frac{n}{mn+1}, (m, n) \in \mathbb{N}^2 \right\}.$$

Équations, inéquations**Exercice 3.5 (★★)**

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $2x = \sqrt{x^2 + 1}$;	3. $e^{2x} + 2e^{1+x} = \frac{3}{e^{-2}}$;
2. $2\sqrt{x} + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}$;	4. $\ln(x)^2 - \ln(x) - 10 = \frac{8}{\ln(x)}$.

Exercice 3.6 (★★)

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\frac{3x+4}{x^2+1} \geq 5$;	3. $2x^4 - 9x^2 + 4 < 0$;	5. $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x-1} < \frac{1}{4x^2}$;
2. $\frac{x-2}{2x+1} \leq -1$;	4. $e^{2x} - e^x \leq 2$;	6. $\frac{x+5}{x^2-1} \geq 1$.

Inégalités diverses**Exercice 3.7 (★)**

Montrer que pour tout réel x , $x^2 - \frac{x}{2} \leq \ln(1+x^2) \leq x^2$.

Puisque toutes les quantités qui interviennent dans l'énoncé dépendent toutes de x^2 , nous allons plutôt prouver que pour tout $X \in \mathbb{R}_+$, $X - \frac{X^2}{2} \leq \ln(1+X) \leq X$. En effet, une fois ces inégalités prouvées, pour $x \in \mathbb{R}$, en posant $X = x^2 \geq 0$, il viendra alors

$$X - \frac{X^2}{2} \leq \ln(1+X) \leq X \Leftrightarrow x^2 - \frac{x^4}{2} \leq \ln(1+x^2) \leq x^2$$

Prouvons donc séparément les deux inégalités $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$ et $\ln(1+x) \leq x$. Pour la première définissons une fonction f sur \mathbb{R}_+ en posant $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. Alors f est dérivable et $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-(1+x)+x(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$. Et donc pour tout $x \geq 0$, $f'(x) \geq 0$, de sorte que f est croissante sur $[0, +\infty[$. Puisque de plus, $f(0) = 0$, on en déduit que pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$$

Pour prouver l'autre inégalité, définissons une fonction g sur \mathbb{R}_+ par $g(x) = \ln(1+x) - x$. Alors

g est dérivable et $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leq 0$. On en déduit que g est décroissante sur \mathbb{R}_+ , et puisque $g(0) = 0$, il vient donc, pour tout $x \geq 0$:

$$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) - x \leq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq x.$$

En résumé, on a bien, pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Exercice 3.8 (★★)

1. Montrer que pour tous réels a et b , $(a+b)^2 \geq 4ab$.

2. En déduire que pour a et b strictement positifs, $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$.

3. Montrer que pour x, y, z strictement positifs, $\frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{yz}{y+z} \leq \frac{x+y+z}{2}$.

1. On a

$$(a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$$

Puisque cette dernière inégalité est trivialement vérifiée, on a bien $(a+b)^2 \geq 4ab$.

2. Puisque $(a+b)^2 \geq 4ab$, alors

$$\frac{(a+b)(a+b)}{4} \geq ab \underset{a+b>0}{\Leftrightarrow} \frac{a+b}{4} \geq \frac{ab}{a+b}$$

3. En appliquant trois fois le résultat de la question précédente,

$$\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}, \quad \frac{xz}{x+z} \leq \frac{x+z}{4}, \quad \frac{yz}{y+z} \leq \frac{y+z}{4}.$$

En sommant ces trois inégalités, il vient

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{yz}{y+z} \leq \frac{x+y}{4} + \frac{x+z}{4} + \frac{y+z}{4} \leq \frac{2x+2y+2z}{4} \leq \frac{x+y+z}{2}.$$

Exercice 3.9 (★★)

Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$. Démontrer que :

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2.$$

Indication : On pourra introduire la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.

On introduit la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$. f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* par quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. Et pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{\frac{a}{1+ax} \ln(1+bx) - \frac{b}{1+bx} \ln(1+ax)}{\ln(1+bx)^2} = \frac{g(x)}{(1+ax)(1+bx) \ln(1+bx)^2},$$

avec $g(x) = a(1 + bx) \ln(1 + bx) - b(1 + ax) \ln(1 + ax)$.

La fonction g est elle-même dérivable sur \mathbb{R}_+ , et pour tout $x \geq 0$:

$$g'(x) = ab \ln(1 + bx) + ab - ba \ln(1 + ax) - ba = ab \ln\left(\frac{1 + bx}{1 + ax}\right) \geq 0.$$

Donc g est croissante sur \mathbb{R}_+ . Et puisque $g(0) = 0$, g est positive sur \mathbb{R}_+^* . Ainsi f est croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Puisque $0 < a \leq b$, on a $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$. En appliquant f , on obtient $f(1/b) \leq f(1/a)$, soit :

$$\frac{\ln(1 + a \times 1/b)}{\ln(1 + b \times 1/b)} \leq \frac{\ln(1 + a \times 1/a)}{\ln(1 + b \times 1/a)}.$$

D'où finalement :

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2.$$

Exercice 3.10 (★★)

Montrer par récurrence que pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - nt \leq (1 - t)^n \leq \frac{1}{1 + nt}$.

Comme indiqué, procédons par récurrence sur n . Soit donc $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $\forall t \in [0, 1], 1 - nt \leq (1 - t)^n \leq \frac{1}{1 + nt}$ ».

Init. Soit $t \in [0, 1]$. On a évidemment $1 - t \leq (1 - t)^1$ et

$$1 - t \leq \frac{1}{1 + t} \Leftrightarrow (1 - t)(1 + t) \leq 1 \Leftrightarrow 1 - t^2 \leq 1 \Leftrightarrow t^2 \geq 0$$

ce qui est évidemment vrai. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hér. Supposons à présent que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et soit $t \in [0, 1]$.

On a par hypothèse de récurrence $(1 - t)^n \geq 1 - nt$, ce qui après multiplication par $1 - t$ (qui est positif) donne $(1 - t)^{n+1} \geq (1 - t)(1 - nt)$. Mais

$$(1 - t)(1 - nt) = 1 - (n + 1)t + \underbrace{nt^2}_{\geq 0} \geq 1 - (n + 1)t$$

Et donc $(1 - t)^{n+1} \geq 1 - (n + 1)t$. D'autre part, par hypothèse de récurrence, $(1 - t)^n \leq \frac{1}{1 + nt}$ et $1 - t \leq \frac{1}{1 + t}$. Donc en multipliant ces deux inégalités (formées de nombres positifs),

$$(1 - t)^{n+1} \leq \frac{1}{1 + nt} \frac{1}{1 + t} \leq \frac{1}{1 + (n + 1)t + t^2} \leq \frac{1}{1 + (n + 1)t}.$$

La proposition est donc vérifiée au rang $n + 1$

Par le principe de récurrence, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$ et quel que soit $t \in [0, 1]$,

$$1 - nt \leq (1 - t)^n \leq \frac{1}{1 + nt}$$

Exercice 3.11 (★★)

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous réels strictement positifs a_1, a_2, \dots, a_n :

$$(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

On pourra procéder par récurrence sur n .

3. (★) À quelle condition cette inégalité est-elle une égalité ?

Exercice 3.12 (★★★)

Soient x, y, z trois réels strictement positifs. Montrer que $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}$. À quelle(s) condition(s) cette inégalité est-elle une égalité ?

Soient x, y et z trois réels strictement positifs.

Remarquons que $\frac{x}{z} = \frac{xy}{yz}$ et donc $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{z} + \frac{y^2}{z^2}$. Et de même en permutant les rôles de x, y et z . Il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} &\geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \\ \Leftrightarrow 2\frac{x^2}{y^2} + 2\frac{y^2}{z^2} + 2\frac{z^2}{x^2} &\geq 2\frac{x}{z} + 2\frac{y}{x} + 2\frac{z}{y} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{z} + \frac{y^2}{z^2}\right) &+ \left(\frac{y^2}{z^2} - 2\frac{y}{x} + \frac{z^2}{x^2}\right) + \left(\frac{z^2}{x^2} - 2\frac{z}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 &+ \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est triviale. De plus, il y a égalité dans l'inégalité de départ si, et seulement si :

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 = 0$$

Or une somme de nombres positifs est nulle si, et seulement si, chacun de ces nombres est nul, donc si, et seulement si :

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}, \frac{y}{z} = \frac{z}{x}, \frac{z}{x} = \frac{x}{y}$$

Soit encore si, et seulement si, $x^2 = yz, y^2 = xz$ et $z^2 = xy$. Il vient alors $z = \frac{x^2}{y}$, donc en substituant dans $y^2 = xz$, il vient $y^2 = \frac{x^3}{y} \Leftrightarrow x^3 = y^3$. Et donc $x = y$. On prouve de même que $y = z$, et donc $x = y = z$.

Inversement, il est clair que si $x = y = z$, alors l'inégalité de départ est une égalité.

Valeur absolue**Exercice 3.13 (★)**

Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + (-1)^{n-2}(n-1)^3 + (-1)^{n-1}n^3| \leq n^4$.

Exercice 3.14 (★★)

Résoudre les équations suivantes :

1. $x + |x| = \frac{4}{x}$;

2. $x|x| = 3x + 2$;

3. $|x^2 - 3x - 7| = 3$;

4. $|2x - 4| = |x - 1|$.

Exercice 3.15 (★★)Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $|x + 2| < |x^2 - 4|$;

2. $|x + 5| \geq |x^2 - 25|$;

3. $\left| \frac{1}{x+1} \right| > 2$;

4. $x^2 - 4|x| + 3 > 0$;

5. $|x + 4| \leq |2x + 1|$;

6. $\left| \frac{x-1}{x+3} \right| \leq 2$.

1. Notons que $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$, et donc $|x^2 - 4| = |x + 2| \cdot |x - 2|$. Et donc il vient

$$|x + 2| < |x^2 - 4| \Leftrightarrow |x + 2| < |x + 2| \cdot |x - 2| \Leftrightarrow 0 < |x + 2|(|x - 2| - 1).$$

Il est clair que $x = -2$ n'est pas solution car alors $|x + 2| = 0$. Et pour $x \neq -2$, $|x + 2| > 0$, de sorte que

$$0 < |x + 2|(|x - 2| - 1) \Leftrightarrow |x - 2| - 1 > 0 \Leftrightarrow |x - 2| > 1.$$

Or, $|x - 2| > 1 \Leftrightarrow x - 2 > 1$ ou $x - 2 < -1$. Soit encore $x > 3$ ou $x < 1$. Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $] -\infty, -2[\cup] -2, 1[\cup] 3, +\infty[$.

2. Notons que $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$ et donc $|x^2 - 25| = |x + 5| \cdot |x - 5|$.

Et donc l'inéquation s'écrit encore $|x + 5| \geq |x + 5| \cdot |x - 5|$.

Pour $x \neq -5$, l'inéquation est donc équivalente à $|x - 5| \leq 1$, soit encore $-1 \leq x - 5 \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 6$.

Enfin, -5 est solution de l'inéquation, donc l'ensemble des solutions est $\{-5\} \cup [4, 6]$.

3. Pour $x \neq -1$, $|x + 1| > 0$ et donc

$$\left| \frac{1}{x+1} \right| > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} > |x + 1| \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x + 1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$$

Puisque -1 avait été d'office exclu de l'ensemble des solutions, on trouve donc comme ensemble de solutions $] -\frac{3}{2}, -1[\cup] -1, -\frac{1}{2}[$.

4. Il serait possible de distinguer les cas $x \geq 0$ et $x < 0$, et de résoudre dans les deux cas un inéquation du second degré. Mais notons plutôt que $x^2 = |x|^2$, et donc en posant $X = |x|$, l'inéquation de départ s'écrit $X^2 - 4X + 3 > 0$. Mais le polynôme $X^2 - 4X + 3$ possède un discriminant égal à 4 et possède donc pour racines 1 et 3. Ainsi :

$$X^2 - 4X + 3 > 0 \Leftrightarrow X \in] -\infty, 1[\cup] 3, +\infty[.$$

Puisque d'autre part, $|x| \geq 0$, on a donc

$$x^2 - 4|x| + 3 > 0 \Leftrightarrow |x| \in [0, 1[\cup]3, +\infty[\Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]-1, 1[\cup]3, +\infty[.$$

Exercice 3.16 (★★)

1. Montrer que si x et y sont deux réels positifs tels que $x \geq y$, alors :

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \text{et} \quad \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

2. En déduire que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \quad \text{et} \quad \left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right| \leq \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}.$$

1. Prenons x et y des réels positifs tels que $x \geq y$. Alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} &\Leftrightarrow \underbrace{x+y \leq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}_{\substack{\sqrt{x+y} \geq 0 \text{ et } \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 0}} \\ &\Leftrightarrow x+y \leq x+y+2\sqrt{x} \sqrt{y} \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{xy}. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant satisfaite, il en est de même de celle de départ. Ainsi :

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Utilisons cette inégalité pour obtenir les deux suivantes :

$$\sqrt{x} = \sqrt{(x-y) + y} \leq \sqrt{x-y} + \sqrt{y}$$

par l'inégalité que nous venons de démontrer appliquée à y et $x-y \geq 0$. D'autre part, $x-y \leq x+y$ d'où par croissance de la fonction racine :

$$\sqrt{x-y} \leq \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

en utilisant encore une fois la première inégalité démontrée.

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Par inégalité triangulaire, $|x+y| \leq |x|+|y|$, et par croissance de la fonction racine :

$$\sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x|+|y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|},$$

la dernière inégalité provenant de la question précédente.

Pour la deuxième inégalité, supposons par exemple $|x| \geq |y|$, alors :

$$\left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right| = \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \leq \sqrt{|x| - |y|}.$$

Par la deuxième inégalité triangulaire :

$$|x| - |y| = ||x| - |-y|| \leq |x - y|.$$

D'où par croissance de la fonction racine carrée, puis en utilisant l'inégalité que nous venons d'établir :

$$\sqrt{|x| - |y|} \leq \sqrt{|x - y|} = \sqrt{|x + (-y)|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|-y|} = \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}.$$

Ainsi :

$$\left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right| \leq \sqrt{|x - y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}.$$

Exercice 3.17 (★★★)

Soient x et y des réels. Montrer les inégalités suivantes :

- | | |
|---|--|
| <p>1. $x + y \leq x + y + x - y$;</p> <p>2. $1 + xy - 1 \leq (1 + x - 1)(1 + y - 1)$;</p> | <p>3. $\frac{ x + y }{1 + x + y } \leq \frac{ x }{1 + x } + \frac{ y }{1 + y }$.</p> |
|---|--|

1. On écrit $2x = (x + y) + (x - y)$ et $2y = (x + y) - (x - y)$. Par l'inégalité triangulaire, on obtient

$$2|x| \leq |x + y| + |x - y| \text{ et } 2|y| \leq |x + y| + |x - y|$$

Il suffit de sommer ces deux inégalités pour trouver le résultat voulu.

2. Posons $u = x - 1$ et $v = y - 1$. Alors

$$1 + |xy - 1| = 1 + |uv + u + v| \leq 1 + |u| + |v| + |uv| = (1 + |u|)(1 + |v|) = (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|).$$

3. Une rapide étude montre que la fonction $u \mapsto \frac{u}{1+u}$ est croissante sur $[0, +\infty[$. Puisque $|x + y| \leq |x| + |y|$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{|x + y|}{1 + |x + y|} &\leq \frac{|x| + |y|}{1 + |x| + |y|} \\ &\leq \frac{|x|}{1 + |x| + |y|} + \frac{|y|}{1 + |x| + |y|} \\ &\leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|} \end{aligned}$$

Partie entière

Exercice 3.18 (★)

Soient x et y deux nombres réels.

- Prouver que pour $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq x \Rightarrow n \leq [x]$.
- Montrer que la fonction partie entière est croissante. Est-ce que si $[x] \leq [y]$ alors nécessairement $x \leq y$?
- A-t-on toujours $[x + y] = [x] + [y]$? Montrer que $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$.

Exercice 3.19 (★★★)

Vérifier que pour tout entier naturel n : $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.



Astuce.

Pour montrer que $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$, nous allons montrer que pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$p \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \Leftrightarrow p \leq \sqrt{4n+2}.$$

En effet, la partie entière d'un réel x étant le plus grand entier plus petit que x , cela montrera l'égalité voulue.

On procède par double implication.

Pour le sens direct, prenons $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$. Si $p \leq 0$, $p \leq \sqrt{4n+2}$ est trivialement satisfait. Si $p \geq 0$, on obtient en élevant au carré :

$$p^2 \leq n + n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} < 2n + 1 + 2\sqrt{(n+1)^2} = 4n + 3.$$

Puisque cette inégalité est une inégalité d'entiers, on en déduit que :

$$p^2 \leq 4n + 2 \quad \text{et donc} \quad p \leq \sqrt{4n+2}.$$

Réciproquement, soit $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq \sqrt{4n+2}$. De même, si $p \leq 0$, on a immédiatement $p \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$. Si $p \geq 0$, on obtient en élevant au carré :

$$p^2 \leq 4n + 2.$$



Astuce.

Le carré d'un entier ne peut pas être congru à 2 modulo 4. En effet, si p est pair, il s'écrit de la forme $2k$, et donc $p^2 = 4k^2$ qui est congru à 0 mod 4. Si p est impaire, il s'écrit sous la forme $2k+1$, et donc $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est congru à 1 mod 4.

Puisque $p^2 \neq 4n + 2$, on obtient $p^2 \leq 4n + 1$. Alors (en reprenant les calculs faits plus haut) :

$$p^2 \leq (2n+1) + (2n) = (2n+1) + 2\sqrt{n \times n} \leq (2n+1) + 2\sqrt{n(n+1)} = (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2.$$

D'où en prenant la racine (tout est positif) : $p \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$.

Finalement, on en déduit l'égalité : $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

Exercice 3.20 (★★)

Résoudre l'équation $\lfloor \sqrt{x^2 - x + 2} \rfloor = 2$ et l'inéquation $\lfloor x^2 - 4x - 3 \rfloor + 1 \leq 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Commençons par noter que le discriminant de $x^2 - x + 2$ est $-7 < 0$, de sorte que $x^2 - x + 2$ est de signe constant, positif. Ceci nous garantit que l'équation a bien un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} \lfloor \sqrt{x^2 - x + 2} \rfloor = 2 &\Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x^2 - x + 2} < 3 \\ &\Leftrightarrow 4 \leq x^2 - x + 2 < 9 \end{aligned}$$

On alors $4 \leq x^2 - x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$. Un calcul de discriminant nous informe alors que cette inéquation est vérifiée si, et seulement si, $x \leq -1$ ou $x \geq 2$.

De même, on a $x^2 - x + 2 < 9 \Leftrightarrow x^2 - x - 7 < 0$, ce qui est le cas si, et seulement si, $\frac{1-\sqrt{29}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{29}}{2}$. Puisque $\sqrt{29} > 3$, $\frac{1-\sqrt{29}}{2} < -1$, et de même $\frac{1+\sqrt{29}}{2} > 2$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left] \frac{1-\sqrt{29}}{2}, -1 \right] \cup \left[2, \frac{1+\sqrt{29}}{2} \right[$.

Pour l'inéquation proposée, notons qu'on a

$$\begin{aligned} \left| \lfloor x^2 - 4x - 3 \rfloor + 1 \right| \leq 2 &\Leftrightarrow -2 \leq \lfloor x^2 - 4x - 3 \rfloor + 1 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq \lfloor x^2 - 4x - 3 \rfloor \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq x^2 - 4x - 3 < 2. \end{aligned}$$

Or on a $x^2 - 4x - 3 < 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 < 0$. Le polynôme $x^2 - 4x - 5$ possède un discriminant égal à $\Delta = 16 + 20 = 36$. Ses racines sont donc $x_1 = \frac{4+\sqrt{36}}{2} = 5$ et $x_2 = \frac{4-\sqrt{36}}{2} = -1$.

Et donc $x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow x \in] -1, 5[$.

De même, on a $x^2 - 4x - 3 \geq -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \in] -\infty, 0] \cup [4, +\infty[$. Ainsi, les deux conditions $-3 \leq x^2 - 4x - 3 < 2$ sont vérifiées simultanément si, et seulement si, $x \in] -1, 0] \cup [4, 5[$.

Et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $] -1, 0] \cup [4, 5[$.

Exercice 3.21 (★★)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer les relations suivantes :

- $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$. On pourra distinguer deux cas, suivant que $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}$ ou non.
- $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 3.22 (★★)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $n = \lfloor x \rfloor$.

- Exprimer $\lfloor x - 4 \rfloor$ et $\lfloor 2x - 1 \rfloor$ en fonction de n . On pourra si besoin distinguer plusieurs cas.
- Résoudre l'équation $\lfloor x - 4 \rfloor = \lfloor 2x - 1 \rfloor$.

Exercice 3.23 (★★★★ - Oral Polytechnique)

On considère une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie de la manière suivante :

$$u_1 = 1, u_2 = u_3 = 2, u_4 = u_5 = u_6 = 3, u_7 = u_8 = u_9 = u_{10} = 4, \dots$$

Autrement dit, il s'agit d'une suite croissante d'entiers, et telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, exactement k termes de la suite soient égaux à k . En utilisant la fonction partie entière, donner une expression de u_n en fonction de n .

Si $u_n = k$ cela signifie que u_1, u_2, \dots, u_{n-1} ont pris au moins toutes les valeurs $1, 2, \dots, k-1$, les derniers termes avant u_n pouvant éventuellement être égaux à k .

Or, pour prendre toutes les valeurs $1, 2, \dots, k-1$, il a fallu au moins $1 + 2 + \dots + (k-1)$ termes, de sorte que $n \geq 1 + 2 + \dots + k - 1 = \frac{k(k-1)}{2}$.

Ceci signifie que le premier terme de la suite qui porte le numéro k est le terme d'indice $\frac{(k-1)k}{2} + 1$ et que le dernier portant le numéro k est le terme d'indice

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Ainsi, on a $u_n = k \Leftrightarrow \frac{(k-1)k}{2} + 1 \leq n < \frac{k(k+1)}{2} + 1$. Or, $\frac{k(k+1)}{2} + 1 > n \Leftrightarrow k(k+1) + 2 > 2n \Leftrightarrow k^2 + k + 2 - 2n > 0$. À n fixé, il s'agit ici d'une expression polynomiale en k , dont le discriminant est $8n - 7$, et dont les racines sont $k_1 = \frac{-1 - \sqrt{8n-7}}{2}$ et $k_2 = \frac{-1 + \sqrt{8n-7}}{2}$. Et donc $k^2 + k + 2 - 2n > 0$ si et seulement si $k > \frac{-1 + \sqrt{8n-7}}{2}$ (on ne s'intéresse qu'aux k positifs).

De même, on a $\frac{k(k-1)}{2} + 1 \leq n \Leftrightarrow k^2 - k + 2 - 2n \leq 0$ si et seulement si $k \leq \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2}$. Or, $\frac{-1 + \sqrt{8n-7}}{2} = \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} - 1$. Et donc $u_n = k$ si et seulement si $k \leq \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2}$ et $k + 1 > \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2}$. Puisque k est entier, nous reconnaissons là la définition d'une partie entière :

$$u_n = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor.$$