TD3

Rappels et compléments calculatoires en analyse

En vrac

Exercice 3.1 (★)

Simplifier au maximum les expressions suivantes, où x et y sont des réels non nuls et $n \in \mathbb{N}$.

1. $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$;
2. $\left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^4$;
3. $\dfrac{(xy^2)^3}{(-x)^{-2}y^3}$;
4. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{12}\left(\dfrac{2}{9}\right)^5$;
5. $\dfrac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$;
6. $\dfrac{\sqrt{75}-1}{\sqrt{27}+\sqrt{36}}$.

Exercice 3.2 (★★)

Soit $a \in [1, +\infty[$. Simplifier : $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

Exercice 3.3 (★★)

Prouver que :

1. pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq \dfrac{2x + 1 + \cos(2x)}{2 - x^2} \leq 4$;
2. pour tout $x > 0$, $\dfrac{xe^{-\sqrt{x}}}{\ln(x)^2 - \ln(x) + 1} \leq \dfrac{16e^{-2}}{3}$;
3. (★) pour tous x, y dans $[1, 2]$, $\dfrac{2}{5} \leq \dfrac{x + y^2}{x^2 + 2y - y^2} \leq 6$.

Exercice 3.4 (★★)

1. Montrer que l'ensemble E suivant est borné : $E = \{\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}\}$.
2. Les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles minorées, majorées ? Admettent-elles un maximum ou un minimum ?

$$A = \left\{\frac{n}{mn+1}, (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}, \quad B = \left\{\frac{n}{mn+1}, (m, n) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

Équations, inéquations

Exercice 3.5 (★★)

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $2x = \sqrt{x^2 + 1}$;
2. $2\sqrt{x} + 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
3. $e^{2x} + 2e^{1+x} = \dfrac{3}{e^{-2}}$;
4. $\ln(x)^2 - \ln(x) - 10 = \dfrac{8}{\ln(x)}$.

Exercice 3.6 (★★)
Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\dfrac{3x+4}{x^2+1} \geq 5$;
2. $\dfrac{x-2}{2x+1} \leq -1$;
3. $2x^4 - 9x^2 + 4 < 0$;
4. $e^{2x} - e^x \leq 2$;
5. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x-1} < \dfrac{1}{4x^2}$;
6. $\dfrac{x+5}{x^2-1} \geq 1$.

Inégalités diverses

Exercice 3.7 (★)
Montrer que pour tout réel x, $x^2 - \dfrac{x}{2} \leq \ln\left(1+x^2\right) \leq x^2$.

Exercice 3.8 (★★)
1. Montrer que pour tous réels a et b, $(a+b)^2 \geq 4ab$.
2. En déduire que pour a et b strictement positifs, $\dfrac{ab}{a+b} \leq \dfrac{a+b}{4}$.
3. Montrer que pour x, y, z strictement positifs, $\dfrac{xy}{x+y} + \dfrac{xz}{x+z} + \dfrac{yz}{y+z} \leq \dfrac{x+y+z}{2}$.

Exercice 3.9 (★★)
Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$. Démontrer que :

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2.$$

Indication : On pourra introduire la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.

Exercice 3.10 (★★)
Montrer par récurrence que pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - nt \leq (1-t)^n \leq \dfrac{1}{1+nt}$.

Exercice 3.11 (★★)
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

   On pourra procéder par récurrence sur n.
3. (★) À quelle condition cette inégalité est-elle une égalité ?

Exercice 3.12 (★★★)
Soient x, y, z trois réels strictement positifs. Montrer que $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{z^2} + \dfrac{z^2}{x^2} \geq \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y}$. À quelle(s) condition(s) cette inégalité est-elle une égalité ?

Valeur absolue

Exercice 3.13 (★)

Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots + (-1)^{n-2}(n-1)^3 + (-1)^{n-1}n^3| \leq n^4$.

Exercice 3.14 (★★)

Résoudre les équations suivantes :

1. $x + |x| = \dfrac{4}{x}$;
2. $x|x| = 3x + 2$;
3. $|x^2 - 3x - 7| = 3$;
4. $|2x - 4| = |x - 1|$.

Exercice 3.15 (★★)

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $|x + 2| < |x^2 - 4|$;
2. $|x + 5| \geq |x^2 - 25|$;
3. $\left|\dfrac{1}{x+1}\right| > 2$;
4. $x^2 - 4|x| + 3 > 0$;
5. $|x + 4| \leq |2x + 1|$;
6. $\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right| \leq 2$.

Exercice 3.16 (★★)

1. Montrer que si x et y sont deux réels positifs tels que $x \geq y$, alors :
$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \text{et} \quad \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$
2. En déduire que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \quad \text{et} \quad \left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \leq \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}.$$

Exercice 3.17 (★★★)

Soient x et y des réels. Montrer les inégalités suivantes :

1. $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|.$;
2. $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$;
3. $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|}.$

Partie entière

Exercice 3.18 (★)

Soient x et y deux nombres réels.

1. Prouver que pour $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq x \Rightarrow n \leq \lfloor x \rfloor$.
2. Montrer que la fonction partie entière est croissante. Est-ce que si $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$ alors nécessairement $x \leq y$?
3. A-t-on toujours $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$? Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 3.19 (★★★)
Vérifier que pour tout naturel n : $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

Exercice 3.20 (★★)
Résoudre l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2 - x + 2} \right\rfloor = 2$ et l'inéquation $|\lfloor x^2 - 4x - 3 \rfloor + 1| \leq 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.21 (★★)
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer les relations suivantes :

1. $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$. *On pourra distinguer deux cas, suivant que $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}$ ou non.*
2. $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 3.22 (★★)
Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $n = \lfloor x \rfloor$.

1. Exprimer $\lfloor x - 4 \rfloor$ et $\lfloor 2x - 1 \rfloor$ en fonction de n. On pourra si besoin distinguer plusieurs cas.
2. Résoudre l'équation $\lfloor x - 4 \rfloor = \lfloor 2x - 1 \rfloor$.

Exercice 3.23 (★★★★ - Oral Polytechnique)
On considère une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie de la manière suivante :

$$u_1 = 1, u_2 = u_3 = 2, u_4 = u_5 = u_6 = 3, u_7 = u_8 = u_9 = u_{10} = 4, \ldots$$

Autrement dit, il s'agit d'une suite croissante d'entiers, et telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, exactement k termes de la suite soient égaux à k. En utilisant la fonction partie entière, donner une expression de u_n en fonction de n.
