TD32

Espaces préhilbertiens

Produit scalaire et norme euclidienne

Exercice 32.1 (★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'on définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ en posant

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 32.2 (★★)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 32.3 (★)

On considère l'espace $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et on pose :

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g\rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Établir que pour tout $f \in E$: $\displaystyle\left(f(1) + \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq 2\left(f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 32.4 (★★ - Produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ - ✍)

On considère l'espace $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel défini par $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$.

1. Déterminer la norme du vecteur $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.
2. Établir que pour tout $A \in E$: $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$.
3. Montrer que les sous-espaces $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
4. Montrer que la famille $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ des matrices élémentaires de taille n est une base orthonormée de E.

Exercice 32.5 (★★)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que $\mathrm{rg}\left(A^\top A\right) = \mathrm{rg}\left(AA^\top\right) = \mathrm{rg}(A)$.

Exercice 32.6 (★★ - Théorème de représentation de Riesz)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien.

1. Montrer que l'application $v \mapsto \varphi_v = \langle v, \cdot \rangle$ définit un isomorphisme de E dans $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.
2. En déduire que pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que :
$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle v, x\rangle.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(0) = \displaystyle\int_0^1 P(t)A(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 32.7 (★★★)
Soient E et F deux espaces préhilbertiens, de produits scalaires respectifs $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$, dont les normes associées sont notées $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. Soit $f : E \to F$ une application telle que $f(0_E) = 0_F$ et

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\|_F = \|x - y\|_E.$$

1. Prouver que : $\quad \forall (x,y) \in E^2, \langle x, y\rangle_E = \langle f(x), f(y)\rangle_F$.
2. Montrer alors que f est linéaire.

Bases orthonormées

Exercice 32.8 (★)
On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = -z\}$. On note $e_1 = \dfrac{1}{2}(1,1,-1,-1)$, $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)$ et $e_3 = \dfrac{1}{2}(-1,1,-1,1)$.

1. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de F.
2. Justifier que $u = (2,3,-3,7) \in F$ et déterminer $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

Exercice 32.9 (★★ - Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)
Dans chacun des cas suivants, donner une base orthonormée du sous espace vectoriel F de E, muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}((1,0,-2),(1,1,1))$, produit scalaire canonique ;
2. $E = F = \mathbb{R}_2[X]$, $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$;
3. $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\right)$, $\langle M, N\rangle = \mathrm{tr}(M^\top N)$;
4. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \mathrm{Vect}((1,0,1,0),(1,1,0,1),(2,0,1,1))$, produit scalaire canonique ;
5. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \mathrm{Vect}(X^2+1, X^3+1)$, $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

Solutions.
1. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2), \frac{1}{\sqrt{70}}(6,5,3)\right)$ 2. $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \sqrt{\frac{45}{8}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)\right)$ 3. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$
4. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-1,2), \frac{1}{\sqrt{15}}(1,-3,-1,2)\right)$ 5. $\left(\sqrt{\frac{15}{28}}(X^2+1), \frac{\sqrt{7}}{2}(16X^3 - 15X^2 + 1)\right)$

Exercice 32.10 (★★★)
On considère une famille de vecteurs unitaires $(e_1, \ldots, e_p)$ de E espace euclidien de dimension n, vérifiant la relation suivante :

$$\forall v \in E, \quad ||v||^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle e_k, v\rangle^2.$$

Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthonormale, puis que c'est une base orthonormale de E. En déduire que $n = p$.

Polynômes orthogonaux

Exercice 32.11 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et φ l'application définie par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E. On notera désormais $\varphi(P,Q) = \langle P, Q\rangle$.
2. Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on note $P_i = (X-a)^i$.
   (a) Calculer $P_i^{(k)}(a)$ pour tout $i,k \in [\![0,n]\!]$.
   (b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille orthogonale de E.
   (c) Calculer $\|P_i\|$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$. En déduire une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E.
3. Exprimer les coordonnées d'un polynôme P de E dans cette base $\mathscr{B}$. Retrouver ainsi la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 32.12 (★★★)

On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, et on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $0 \leq p \leq n$, on pose $L_p(X) = \dfrac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}X^p}(X^p(X-1)^p)$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Montrer que L_p est un polynôme dont on précisera son degré et son coefficient dominant.
3. Calculer par intégration par parties $\langle L_p, L_q\rangle$ pour $p \neq q$. En déduire que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Déterminer enfin la norme euclidienne de L_p.

Exercice 32.13 (★★★★ - Polynômes orthogonaux - ✍)

On considère une fonction continue strictement positive $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}$, et on pose :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P, Q\rangle = \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Établir l'existence d'une base orthonormée de polynômes $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ tels que $\deg(P_k) = k$ pour $0 \leq k \leq n$.
   En déduire que pour tout $1 \leq k \leq n$, P_k est orthogonale à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.
3. Montrer, pour $0 \leq k \leq n-1$, qu'il existe a_k, b_k, c_k (avec $c_0 = 0$) tels que :
   $$XP_k = a_kP_{k+1} + b_kP_k + c_kP_{k-1}.$$
   Comparer les deux nombres c_k et a_{k-1}.
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question, on souhaite montrer que toutes les racines de P_k sont des réels appartenant à l'intervalle $]a,b[$, et qu'elles sont toutes de multiplicité 1.
   Notons $x_1, \dots, x_p$ les racines d'ordre impaires de P_k appartenant à $]a,b[$, et on définit le polynôme $D = \prod_{i=1}^{p}(X - x_i)$ (dans le cas où P_k n'a aucune racine d'ordre impair dans $]a,b[$, on pose $D = 1$).
   (a) Justifier que P_kD garde un signe constant sur $[a,b]$.
   (b) Par l'absurde, on suppose que $p < k$. Obtenir une contradiction en considérant le produit scalaire $\langle P_k, (X-x_1)\dots(X-x_p)\rangle$. Conclure.

Orthogonal d'une partie

Exercice 32.14 (★)

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, déterminer une base de $F^\perp$ dans les deux cas suivants :

$$F = \mathrm{Vect}((1,1,0,2),(0,1,3,2)). \qquad F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z+t=0 \text{ et } x-y-t=0\}.$$

Exercice 32.15 (★★ - Propriétés de l'orthogonal - ✍)

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E.

1. Montrer que :
$$F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp \quad ; \quad F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$$
2. En déduire que si E est de dimension finie et si F et G sont des sous-espaces supplémentaires de E, alors $E = F^\perp \oplus G^\perp$.

Exercice 32.16 (★★ - Orthogonal d'un sous-espace de dimension infinie)

On munit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :

$$\forall f,g \in E, \quad \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On considère l'espace $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

1. Soit $f \in H^\perp$. On pose $g : t \mapsto tf(t)$. Que peut-on dire de f et g ? En déduire que $f = 0_E$.
2. En déduire $H^\perp$ et $(H^\perp)^\perp$. A-t-on $H \oplus H^\perp = E$?

Projection orthogonale

Exercice 32.17 (★)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère le sous-espace $F = \mathrm{Vect}((1,1,0),(-2,0,1))$.
Déterminer le projeté de $a = (-2,1,1)$ sur F.

Exercice 32.18 (★ - Calcul de projetés orthogonaux)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le projeté orthogonal de $P_1 = X^2+X+1$ sur $F_1 = \mathbb{R}_1[X]$.
2. Déterminer le projeté orthogonal de $P_2 = X^3+X^2+X+1$ sur $F_2 = \mathrm{Vect}(X^3+X, X^2, 1)$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $P_3 = X^2-1$ sur $F_3 = \mathrm{Vect}(1+X, X^2-X)$.

Réponses : $p_{F_1}(P_1) = 2X + \frac{5}{6}$, $p_{F_2}(P_2) = X^3+X^2+X+1$, $p_{F_3}(P_3) = -\frac{20}{11}X^2 + \frac{32}{11}X - \frac{10}{11}$.

Exercice 32.19 (★★)

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on considère F le sous-espace vectoriel défini par :

$$\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z=0\}.$$

On détermine la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale p sur F par deux méthodes.

1. **Méthode 1.**
   (a) Déterminer une base orthonormale de F.
   (b) Déterminer $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(p)$.

2. **Méthode 2.**
   (a) Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$.
   (b) On note q la projection orthogonale sur $F^\perp$. Déterminer $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(q)$.
   (c) En déduire $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(p)$.

Exercice 32.20 (★★)
Soit E un espace euclidien de base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$, soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension 1, et soit p le projecteur orthogonal sur F. Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = 1$.

Exercice 32.21 (★★★★ - Oral Mines Ponts PSI)
Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire, et $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

1. (a) Soit x un vecteur appartenant à $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}) \cap \mathrm{Im}(u-\mathrm{id})$. Justifier qu'il existe $y \in E$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $nx = u^n(y) - y$.
   (b) En déduire que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$.
2. On pose : $\forall p \in \mathbb{N}$, $v_p = \dfrac{1}{p+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} u^k$, et on note w le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u-\mathrm{id})$.

   Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(v_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $w(x)$, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in E, \quad \lim_{p\to+\infty} \|v_p(x) - w(x)\| = 0.$$

3. Soit q un projecteur de E, distinct de l'application nulle.
   (a) Montrer que si $\mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(q)$ sont orthogonaux, alors : $\forall x \in E$, $\|q(x)\| \leq \|x\|$.
   (b) Réciproquement, on suppose que pour tout $x \in E$, $\|q(x)\| \leq \|x\|$. Soient $x \in \mathrm{Im}(q)$ et $y \in \mathrm{Ker}(q)$. En considérant les vecteurs $z = x + \lambda y$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que : $\langle x, y\rangle = 0$.
   (c) En déduire que le projecteur q est orthogonal si, et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|q(x)\| \leq \|x\|$.
4. En déduire que w est un projecteur orthogonal.

Distance à un sous-espace

Exercice 32.22 (★)
Si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ sont deux polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{i=0}^{2} a_ib_i$.

On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et en déterminer une base.
2. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la distance entre le polynôme X^2 et F.

Exercice 32.23 (★★ - Déterminant de Gram - ✍)
Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $v_1, \dots, v_n \in E$, on définit le déterminant de Gram de ces vecteurs par :

$$\mathrm{Gram}(v_1, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \dots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \dots & \langle v_n, v_n\rangle \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $v_1, \dots, v_n, a \in E$:
$$\mathrm{Gram}(v_1, \dots, v_n, a) = \mathrm{Gram}(v_1, \dots, v_n, a + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n).$$
2. Soient $v_1, \dots, v_n \in E$. Montrer que $(v_1, \dots, v_n)$ est libre si, et seulement si, $\mathrm{Gram}(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.
3. Soient F un sous-espace de E de dimension finie, $(v_1, \dots, v_n)$ une base de F, et $a \in E$. Montrer que :
$$\mathrm{Gram}(v_1, \dots, v_n, a) = \mathrm{Gram}(v_1, \dots, v_n) \times d(a, F)^2.$$

Exercice 32.24 (★★)
Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini par :
$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i).$$
On note $F = \{P \in E \mid P(0) = P(n) = 0\}$. On considère les polynômes :
$$M_k = \prod_{i \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\}} (X - i) \quad \text{et} \quad L_k = \frac{M_k}{M_k(k)}$$
pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de E.
3. Montrer que $(L_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ est une base orthonormée de F.
4. Déterminer l'expression de la projection orthogonale d'un polynôme $P \in E$ sur F.
5. Calculer la distance de P à F pour tout polynôme P de E.

Exercice 32.25 (★★★)
On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel. Soit $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.
2. Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Déterminer la distance entre la matrice J et le sous-espace F.

Exercice 32.26 (★★★ - Oral Mines Ponts PSI)
L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire défini par :
$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence et l'unicité d'une suite $p_0, \dots, p_n$ telle que :
$$\frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{(X+1)(X+2)\dots(X+n+1)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{p_i}{X+i+1}.$$
2. Montrer que $P = p_0 + p_1 X + \cdots + p_n X^n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. Calculer $< P, X^n >$. Montrer que $< P, P >= p_n < P, X^n >$, puis déterminer $\|P\|$.
4. En déduire la distance δ_n de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.