TD33

Familles sommables

Dans ce TD, si $\alpha > 1$, on note $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. On pourra admettre que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Étude de sommabilité est calcul de sommes

Exercice 33.1 (★)

1. Soit $q \in [0,1[$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $u_n = q^{|n|}$.

   Montrer que la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, et que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \frac{1+q}{1-q}$.

2. Soit $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer la sommabilité et calculer la somme de $\left(r^{|n|}e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 33.2 (★★)

La famille $(x)_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est-elle sommable ? Même question pour $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}$.

Exercice 33.3 (★★)

Si $q \in \mathbb{Q}$, on note d_q le dénominateur de la forme irréductible de q.

Étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{d_q^3}\right)_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}$.

Exercice 33.4 (★★)

Soit $I = (\mathbb{N}^*)^2$. Pour $(i,j) \in I$, on pose $u_{i,j} = \frac{1}{\max(i,j)^3}$.

À l'aide du théorème de sommation par paquets, prouver que $\sum_{(i,j)\in I} u_{i,j} = 2\zeta(2) - \zeta(3)$.

Exercice 33.5 (★★)

Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n(\zeta(n) - 1)$ et $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2p)}{2^{2p}}$.

Exercice 33.6 (★★)

Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable.

Exercice 33.7 (★★)

Étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{ab(a+b)}\right)_{(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$.

Interversion de sommes

Exercice 33.8 (★★)

Après avoir justifié son existence, calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{q^3}$ en fonction de $\zeta(3)$.

Exercice 33.9 (★★)

Pour $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, on pose $u_{n,p}=\begin{cases}0 & \text{si } n=p\\ \dfrac{1}{n^2-p^2} & \text{sinon}\end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,p}=\frac{3}{4p^2}$.
2. Après avoir justifié leur existence, vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}u_{n,p}\neq\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,p}$.
3. Quelle conclusion en tirez-vous ?

Divers

Exercice 33.10 (★★)

Exercice 34.11 Soit $\sigma:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ une permutation de $\mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{\sigma(n)^2}$, et le cas échéant, calculer sa somme.
2. Même question pour la série de terme général $\dfrac{1}{\sigma(n)}$.

Exercice 33.11 (★★)

1. Soit $z\in\mathrm{C}$ tel que $|z|<1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{1-z^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)z^n$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.
2. De même, écrire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nz^n}{1-z^n}$ sous la forme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}s(n)z^n$, où $s(n)$ est une suite à préciser dont on donnera une interprétation arithmétique.

Exercice 33.12 (★★★ - Oral X)

Montrer, pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x|<1$, les identités

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^{2n}},\qquad\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}=\frac{x}{1-x}$$

On veillera à bien justifier les convergences de toutes les séries en jeu.

Exercice 33.13 (★)

Étudier l'existence et le cas échéant, calculer la somme $\displaystyle\sum_{\substack{p,q\geqslant1\\ p\wedge q=1}}\frac{1}{p^2q^2}$.

Produit de Cauchy

Exercice 33.14 (★★)

Soit $x \in]-1,1[$. Déterminer une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\dfrac{e^x}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exercice 33.15 (★★ - Formule du binôme négatif)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, et soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n}{p} z^n$$