TD4
Calcul algébrique et trigonométrique

Calcul de sommes et de produits

Exercice 4.1 (★)
Soit n un entier naturel. Calculer :

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$;

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$;

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2^k+4k+n-3)$;

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{2^{2k-1}}$;

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$;

(6) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}.$;

(7) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 2\exp(2^k)$;

(8) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$;

(9) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{2k-1}.$

Exercice 4.2 (★★)
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer à l'aide de nombres factoriels les produits $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$.
2. Même question pour le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$.

Exercice 4.3 (★★★)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$$

Exercice 4.4 (★★)
Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$.

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Init. Pour $n=1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k} = \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}$.

Hér. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k} \\
&\geq \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{2^{n+1}} \\
&\geq \frac{n}{2} + \left(2^{n+1}-2^n\right)\frac{1}{2^{n+1}} \\
&\geq \frac{n}{2} + 1 - \frac{1}{2} \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

Donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$.

Exercice 4.5 (★★)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} f_i$ est dérivable, et que $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n}\left(f_i' \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} f_k\right)$.

Procédons par récurrence sur n en prouvant $\mathscr{P}(n)$: « quelles que soient les fonctions $f_1, \dots, f_n$ dérivables sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} f_i$ est dérivable avec $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} f_k\right)$ ».

Init. Pour $n = 1$, c'est évident puisque $f_1'\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq 1}}^{1} f_k\right) = f_1' \times 1 = f_1'$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, et soient $f_1, \dots, f_{n+1}$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Alors par hypothèse de récurrence, $f_1 \times \cdots \times f_n$ est dérivable, si bien que par produit, $f_1 \times \cdots \times f_{n+1} = (f_1 \times \cdots \times f_n)\, f_{n+1}$ est dérivable. Et alors, par dérivation d'un produit, il vient

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^{n+1} f_i\right)' &= \left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' f_{n+1} + \left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right) f_{n+1}' \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(f_i' \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} f_k\right) f_{n+1} + f_{n+1}' \prod_{k=1}^{n} f_k \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(f_i' \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n+1} f_k\right) + f_{n+1}' \prod_{\substack{k=1\\k\neq n+1}}^{n+1} f_k \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} f_i' \left(\prod_{\substack{k<1\\k\neq i}}^{n+1} f_k\right)
\end{aligned}$$

Et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Coefficients binomiaux et formule du binôme

Exercice 4.6 (★)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\displaystyle A_n = \sum_{\substack{0\leq k\leq n\\k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle B_n = \sum_{\substack{0\leq k\leq n\\k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$.
Calculer $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$. En déduire la valeur des sommes A_n et B_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme suggéré, calculons :

$$\begin{aligned} A_n + B_n &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n. \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} A_n - B_n &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $A_n = B_n$, et $2A_n = 2B_n = 2^n$, soit $A_n = B_n = 2^{n-1}$.

Exercice 4.7 (★)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

1. En effectuant le changement d'indice $j = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n.
2. En déduire la valeur de $2S_n$, puis celle de S_n.

Exercice 4.8 (★★)

1. Soit p entier naturel fixé. Démontrer par récurrence que : $\quad \forall n \geq p, \quad \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
2. Retrouver ce résultat en utilisant un télescopage.
3. À l'aide de cette formule, retrouver les sommes classiques : $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \quad$ et $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 4.9 (★★)

En utilisant la fonction polynomiale $f : x \mapsto (1+x)^n$, calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \; ; \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \; ; \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} \; ; \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Exercice 4.10 (★★)

1. Soient n, p et q trois entiers naturels vérifiant $n \leq p+q$. En développant de deux manières différentes $(1+x)^{p+q}$, établir :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

   On admettra pour cela que si deux fonctions polynomiales sont égales sur $\mathbb{R}$, alors leurs coefficients sont égaux.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$.

Exercice 4.11 (★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, puis que $3b_n^2 = a_n^2 - 1$.
2. Montrer que $\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor$ est un entier impair.

> Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
>
> 1. La formule du binôme de Newton permet d'écrire :
>
> $$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{3}^k 2^{n-k} &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \sqrt{3}^{2k} 2^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \sqrt{3}^{2k+1} 2^{n-2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 3^k 2^{n-2k} + \sqrt{3} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 3^k 2^{n-2k-1}.\end{aligned}$$
>
> Ainsi, en posant $a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 3^k 2^{n-2k}$ et $b_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 3^k 2^{n-2k-1}$, a_n et b_n sont des entiers tels que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$.
>
> En remplaçant $\sqrt{3}$ par $-\sqrt{3}$, on a aussi $(2-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$. Mais alors,
>
> $$a_n^2 - 3b_n^2 = \left(a_n + b_n\sqrt{3}\right)\left(a_n - b_n\sqrt{3}\right) = (2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n = (4-3)^n = 1$$
>
> 2. On note que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = \left(a_n + b_n\sqrt{3}\right) + \left(a_n - b_n\sqrt{3}\right) = 2a_n$. Mais $0 < (2-\sqrt{3})^n < 1$, d'où :
>
> $$(2+\sqrt{3})^n < (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2a_n < (2+\sqrt{3})^n + 1$$
>
> ou encore
>
> $$2a_n - 1 < (2+\sqrt{3})^n < 2a_n.$$
>
> On en déduit que $\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor = 2a_n - 1$, et donc que $\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor$ est un entier impair.

Exercice 4.12 (★★★)

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.

> Notons que le premier et le dernier terme de la somme sont égaux à 1, et donc que :
>
> $$u_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geq 2$$
>
> D'autre part, pour $k = 1$ et $k = n-1$, on a $\binom{n}{k} = \frac{1}{n}$.
> Pour les autres coefficients, essayons de nous faire une petite intuition de ce qu'il se passe. Les

coefficients que nous considérons sont sur une même ligne du triangle de Pascal. Or, vous avez probablement déjà constaté que sur une ligne du triangle de Pascal, les coefficients croissent jusqu'au milieu de la ligne, puis décroissent. En particulier, si $k \in [\![2, n-2]\!]$, on doit avoir $\binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} \geq \frac{n(n-1)}{2}$.
Admettons provisoirement ceci. On aura alors, pour $k \in [\![2, n-2]\!]$, $\frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \frac{2}{n(n-1)}$.
Et donc :

$$\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)} \leq (n-3)\frac{2}{n(n-1)}$$

Et par conséquent, il vient

$$2 \leq u_n \leq 2 + \frac{2}{n} + 2\frac{(n-3)}{n(n-1)}$$

Mais $\frac{2(n-3)}{n(n-1)} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{n - \frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
Et donc par le théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$.
Reste à présent à prouver ce que nous n'avons que « constaté » sur le triangle de Pascal. Soit donc $k \in [\![2, n-2]\!]$. Alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times k} = \frac{n(n-1)}{2} \frac{(n-2)(n-3)\cdots(n-k+1)}{k \times (k-1) \times \cdots \times 3}$$
$$= \frac{n(n-1)}{2} \frac{n-2}{k} \frac{n-3}{k-1} \cdots \frac{n-k+1}{3}.$$

Or, on a $k \leq n-2$, de sorte que $\frac{n-2}{k} \geq 1$. Puis $\frac{n-3}{k-1} \geq 1, \ldots, \frac{n-k+1}{3} \geq 1$.
Et donc on a bien, comme annoncé, $\binom{n}{k} \geq \frac{n(n-1)}{2}$

Exercice 4.13 (★★★★)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n+1}{i}\right]$.

Il s'agit d'utiliser l'identité de Pascal : pour $i \geq 1$, $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n+1}{i}\right] &= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left[1+\sum_{i=1}^{k}\binom{n+1}{i}\right]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left[1+\sum_{i=1}^{k}\left(\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\right)\right]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left[1+\sum_{i=1}^{k}\binom{n}{i}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}\right]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left[1+\sum_{i=1}^{k}\binom{n}{i}+\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j}\right]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\Bigg[\binom{n}{k}\Bigg]\, 2+2\sum_{i=1}^{k-1}\binom{n}{i}+\binom{n}{k}\Bigg]\Bigg] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left[2\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}+\binom{n}{k}\right]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Bigg] + 2\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{k}\Bigg]\binom{n}{i}\Bigg] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 + 2\sum_{0\leq i<k\leq n}\binom{n}{k}\binom{n}{i} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)^2 \\
&= (2^n)^2 = 2^{2n}.
\end{aligned}$$

Rappel.
La formule clé que nous avons utilisée à l'avant dernière étape est :

$$(a_1+\cdots+a_n)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j$$

Sommes doubles

Exercice 4.14 (★)

Soit n un entier naturel non nul. Calculer successivement :

$$\sum_{0\leq i,j\leq n}(i+j),\qquad \sum_{1\leq i,j\leq n}\min(i,j),\qquad \sum_{1\leq i,j\leq n}\max(i,j)\quad \text{et}\quad \sum_{1\leq i,j\leq n}|i-j|.$$

Exercice 4.15 (★★)

Soit n un entier naturel. On considère la somme double $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n}2^j$.

1. Calculer de deux manières différentes la somme double S_n.

   En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k2^{k-1} = (n-1)2^n+1.$

2. Déterminer alors la valeur de la somme double $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i+1}k2^{k-1}$.

Exercice 4.16 (★★)

Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

(1) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n}(i+j)^2$;

(2) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n}x^{i+j} \quad (x\in\mathbb{C})$;

(3) $\displaystyle\sum_{0\leq i<j\leq n}ij$;

(4) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n}\binom{i}{j}$;

(5) $\displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n}\frac{i}{j+1}$;

(6) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}(1-2^i)2^{ij}$;

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n}\frac{k\ell}{n(n-1)}$.

Exercice 4.17 (★★)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Justifier que $\displaystyle\sum_{1\leq p,q\leq n}(p+q)=2\sum_{1\leq i<j\leq n}(i+j)+2\sum_{k=1}^{n}k$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n}(i+j)$.

Il s'agit tout simplement d'une relation de Chasles, en notant qu'on peut couper en trois l'ensemble $I_n=[\![1,n]\!]^2$ en notant que

$$I_n=\left\{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2 \mid p<q\right\}\cup\left\{(p,q)\in[\![1,n]\!]^2 \mid p>q\right\}\cup\left\{(k,k),k\in[\![1,n]\!]^2\right\}.$$

Ces trois ensembles sont clairement deux à deux disjoints. Et alors

$$\sum_{1\leq p,q\leq n}(p+q)=\sum_{1\leq p<q\leq n}(p+q)+\sum_{k=1}^{n}(k+k)+\sum_{1\leq q<p\leq n}(p+q)$$

La somme du milieu est $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k$.

Et la première et la dernière sont toutes deux égales à $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n}(i+j)$, si bien qu'on a bien l'égalité annoncée :

$$\sum_{1\leq p,q\leq n}(p+q)=2\sum_{1\leq i<j\leq n}(i+j)+2\sum_{k=1}^{n}k$$

Il est facile de constater que

$$\sum_{1\leq p,q\leq n}(p+q)=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}(p+q)=\sum_{p=1}^{n}\left(np+\sum_{q=1}^{n}q\right)=\sum_{p=1}^{n}np+n\sum_{q=1}^{n}q=\frac{n^2(n+1)}{2}+\frac{n^2(n+1)}{2}=n^2(n+1)$$

Et donc

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(i+j)=\frac{1}{2}\sum_{1\leq p,q\leq n}(p+q)-\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n^2(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n-1)n(n+1)}{2}$$

Calcul trigonométrique

Exercice 4.18 (★)

Résoudre les équations et inéquations suivantes. *Autant que possible, on s'aidera d'un cercle trigonométrique.*

(1) $\cos x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$;

(2) $|\tan(x)| \leq 1$;

(3) $\cos^2(x) \geq \frac{1}{4}$;

(4) $2\sin^2(x) + \sin^2(2x) = 2$;

(5) $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) > 1$.

Exercice 4.19 (★)

1. En notant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
2. Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 4.20 (★★)

1. Écrire $\sin(5x)$ sous forme d'un polynôme en $\sin(x)$.
2. En déduire que $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice 4.21 (★★)

Résoudre l'équation suivante dans $[0, \pi]$: $\quad \cos(x) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

> Puisque $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} > 0$, une solution de cette équation est nécessairement dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur lequel le cosinus est positif. On peut donc se restreindre à la résolution de cette équation sur cet intervalle. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a :
>
> $$\begin{aligned}\cos(x) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} &\underbrace{\Leftrightarrow}_{\cos(x)\geq 0} \cos(x)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\underbrace{\Leftrightarrow}_{2x\in[0,\pi]} 2x = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$
>
> L'ensemble des solutions de cette équation sur $[0, \pi]$ est donc $\left\{\dfrac{\pi}{12}\right\}$.

Exercice 4.22 (★)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, puis $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Retrouver alors les valeurs de $\cos\frac{\pi}{6}$ et $\cos\frac{\pi}{3}$.

> On a
>
> $$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(x+2x) = \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) \\ &= \cos(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right) - 2\sin^2(x)\cos(x) \\ &= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\left(1-\cos^2(x)\right)\cos(x) \\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x).\end{aligned}$$

Notons qu'en particulier, pour $x = \dfrac{\pi}{3}$, on obtient $-1 = \cos(\pi) = 4\cos^3\frac{\pi}{3} - 3\cos\frac{\pi}{3}$.
Et donc $\cos\frac{\pi}{3}$ est racine du polynôme $P(X) = 4X^3 - 3X + 1$.
Or, -1 est racine évidente de P, qui se factorise donc en $P(X) = (X+1)\left(4X^2 - 4X + 1\right)$, dont les racines sont $-1, \frac{1}{2}$ et $\frac{-1}{2}$.
Puisque $\cos\frac{\pi}{3} \neq -1$ et $\cos\frac{\pi}{3} > 0$, on en déduit que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
Puisque $\sin\frac{\pi}{3} \geq 0$, on en déduit $\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Puis en notant que $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$, on obtient $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.
De même, on a

$$\begin{aligned}\sin(4x) = \sin(2\times 2x) &= 2\sin(2x)\cos(2x)\\ &= 4\sin(x)\cos(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right)\\ &= 8\cos^3(x)\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x)\end{aligned}$$

Exercice 4.23 (★★)
Résoudre les équations suivantes :

(1) $\tan(2x) = 3\tan(x)$;

(2) $\cos(2x) - \cos(3x) = 0$;

(3) $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.

Exercice 4.24 (★★)
Résoudre l'inéquation $\sqrt{1 + 2\cos(x)} \leq \sin x$.

Exercice 4.25 (★★)
Résoudre l'inéquation $\cos^2(x) - \cos(x)\sin(x) \geq 1$.
On pourra commencer, lorsque c'est possible, par se ramener à une inéquation en $\tan x$.

Notons que par 2π-périodicité de sin et cos, il suffit de chercher les solutions dans $[-\pi, \pi]$. Mieux : $\cos^2$ et $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ sont π-périodiques, et il suffit donc de chercher les solutions dans $[0, \pi]$.
On suppose donc dans la suite que $x \in [0, \pi]$.
Constatons que $\dfrac{\pi}{2}$ n'est pas solution, et que pour $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire lorsque $\tan x$ existe), on a $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$ et

$$\cos(x)\sin(x) = \cos^2(x)\tan(x) = \frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

Et donc il s'agit de résoudre l'inéquation :

$$\frac{1-\tan(x)}{1+\tan^2(x)} \geq 1$$

Posons alors $X = \tan x$. On a

$$\frac{1-X}{1+X^2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1-X}{1+X^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-X^2 - X}{1+X^2} \geq 0 \Leftrightarrow X(X+1) \leq 0.$$

Ce qui est le cas si, et seulement si, $X \in [-1, 0]$. Soit encore si, et seulement si, $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation de départ est $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi\right]$.

Exercice 4.26 (★★)
Montrer que pour $n \geq 2$, on a $2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ (où il y a $n-1$ racines carrées).

Exercice 4.27 (★★)

1. Démontrer que pour tout α dans un ensemble à préciser, on a $\tan^2(\alpha)\tan(2\alpha) = \tan(2\alpha) - 2\tan\alpha$.
2. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\tan^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\tan\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)$ où $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Donner la limite de S_n lorsque $n \to +\infty$.

> 1. Pour que $\tan\alpha$ et $\tan(2\alpha)$ aient un sens, il faut que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $2\alpha \neq \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$.
> Pour un tel α, on a $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ et donc
> $$\tan(2\alpha) - 2\tan\alpha = \frac{2\tan\alpha - 2\tan\alpha\left(1-\tan^2\alpha\right)}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan^2\alpha\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan^2\alpha\tan(2\alpha)$$
> 2. En utilisant la formule de la question précédente (valable car $\frac{x}{2^k} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ pour tout $k \geq 1$), il vient :
> $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\tan^2\frac{x}{2^k}\tan\frac{x}{2^{k-1}} &= \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\left(\tan\frac{x}{2^{k-1}} - 2\tan\frac{x}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\tan\frac{x}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^{n} 2^k\tan\frac{x}{2^k} \\ &= \tan x - 2^n\tan\frac{x}{2^n}\end{aligned}$$
> 3. Il nous faut donc déterminer la limite de $2^n\tan\frac{x}{2^n}$ lorsque $n \to +\infty$.
> Or,
> $$2^n\tan\frac{x}{2^n} = x\frac{\tan\frac{x}{2^n} - \tan(0)}{\frac{x}{2^n} - 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x\tan'(0) = x\left(1+\tan^2(0)\right) = x.$$
> Et donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \tan(x) - x$ [5] Qui est valable car pour $k \geq 1$,
> $$-\frac{\pi}{4} \leq \frac{x}{2k} \leq \frac{\pi}{4}.$$
>
> > **Rappel ?**
> > On a utilisé ici la dérivabilité de tan en 0. Rappelons en effet que tan est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$ en tant que quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas, et que pour tout $x \notin \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$:
> > $$\tan'(x) = \frac{\cos(x)^2+\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1+\tan(x)^2.$$

Exercice 4.28 (★★)

1. Montrer que pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{\sin t}{t}$.
3. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x}$.