TD5

Rappels et compléments sur les fonctions

Parité, périodicité

Exercice 5.1 (★ - ✍)

Soient $f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que :

1. si f est paire, alors $g \circ f$ est paire.
2. si f et g sont impaires, alors $g \circ f$ est impaire.
3. si f est impaire et g est paire, alors $g \circ f$ est paire.
4. si f est périodique, alors $g \circ f$ est périodique. (★) En est-il de même pour $f \circ g$?

1. La fonction $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. Et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = g \circ f(x).$$
Donc $g \circ f$ est paire.
2. On procède de manière similaire à précédemment.
3. Idem.
4. Supposons que f soit périodique de période $T > 0$. Alors le domaine de définition de $g \circ f$ est $\mathbb{R}$, qui vérifie bien :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + T \in \mathbb{R} \text{ et } x - T \in \mathbb{R}.$$
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g \circ f(x+T) = g(f(x+T)) = g(f(x)) = g \circ f(x).$$
Donc $g \circ f$ est T-périodique.

Il n'en est pas de même de $f \circ g$. On peut s'en convaincre en considérant $f = \cos$ et $g : x \mapsto x^2$. En effet, supposons que $f \circ g : x \mapsto \cos(x^2)$ soit T-périodique pour un certain $T > 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x^2) = \cos((x+T)^2)$.

Pour $x = 0$, on obtient $\cos(T^2) = \cos(0) = 1$. Par conséquent, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^2 = 2k\pi$, et donc $T = \sqrt{2k\pi}$ puisque $T > 0$.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\cos(x^2) = \cos(x^2 + 2Tx + T^2) = \cos(x^2 + 2\sqrt{2k\pi}x).$$
Pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2k\pi}}$, on obtient :
$$\cos\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = \cos\left(\frac{1}{2k\pi} + 2\right)$$
En notant $\theta = \dfrac{1}{2k\pi}$, on obtient donc :
$$\theta \equiv \theta + 2\,[2\pi] \text{ ou } \theta \equiv -\theta + 2\,[2\pi]$$

La première congruence est impossible puisque $2 \notin 2\pi\mathbb{Z}$ (π étant irrationnel). La seconde se récrit $\theta \equiv 1\,[\pi]$, ce qui donne l'existence d'un entier ℓ tel que $\theta = 1 + \ell\pi$. Mais là aussi, on aboutit à une contradiction puisque $\theta \in]0,1[$ et que $1+\ell\pi \notin]0,1[$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5.2 (★★)

1. Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - \frac{\lfloor x \rfloor}{k}$ est k-périodique.
2. Que dire d'une fonction périodique et croissante ? D'une fonction périodique et strictement croissante ?

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Nous avions établi au chapitre 3 que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$$
D'où ici :
$$\left\lfloor \frac{x+k}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor + 1 \quad \text{et} \quad \lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k.$$
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f_k(x+k) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor + 1 - \left(\frac{\lfloor x \rfloor + k}{k} \right) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - \frac{\lfloor x \rfloor}{k} = f_k(x).$$
Donc f_k est k-périodique.

2. Prouvons qu'une fonction périodique et croissante est nécessairement constante.

   Soit donc $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$ une fonction périodique et constante. Nous allons prouver que $\forall x, y \in \mathscr{D}, f(x) = f(y)$, ce qui est l'une des caractérisations des fonctions constantes.

   Soient donc $x, y \in \mathscr{D}$. Quitte à les échanger, supposons que $x \leqslant y$. Notons T une période de f, et soit alors $n \in \mathbf{N}$ tel que $x + nT \geqslant y$ (un tel entier existe bien puisque $\lim_{n\to+\infty} x + nT = +\infty$).

   On a alors $x \leqslant y$, donc par croissance de f, $f(x) \leqslant f(y)$.

   Et $y \leqslant x + nT$, donc par croissante de f, $f(y) \leqslant f(x+nT)$.

   Or par T-périodicité de f, $f(x+nT) = f(x)$.

   On a donc $f(x) \leqslant f(y) \leqslant f(x)$, si bien que $f(x) = f(y)$.

   Donc une fonction continue et périodique est constante.

   En revanche, il n'existe pas de fonction périodique et strictement croissante.

   En effet, supposons qu'une telle fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$, T-périodique et strictement croissante existe.

   Soit alors $x \in \mathscr{D}$. On a $x + T > x$, et donc $f(x+T) > f(x)$, ce qui contredit la définition de la T-périodicité.

Exercice 5.3 (★★)

Dans tout l'exercice, on se place dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Justifier que la symétrie par rapport à la droite (verticale) d'équation $x = \frac{a}{2}$ envoie un point de coordonnées (x, y) sur le point de coordonnées $(a - x, y)$.
2. Soit $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [0, a]$, $f(x) = f(a - x)$. Justifier alors que $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)\,|2\cos^2(x) - 1|$.
   (a) Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   (b) (★) Tracer le graphe de f sur $[-\pi, 2\pi]$.

Exercice 5.4 (★★★)

Soit $a > 0$, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$.
Prouver que f est périodique.

> Notons que l'équation implique que nécessairement $f(x)$ est toujours compris entre $\frac{1}{2}$ et 1 (car $f(x) - f(x)^2 \geqslant 0$ si, et seulement si, $f(x) \in [0,1]$).
> On a alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$,
>
> $$\begin{aligned} f(x+2a) &= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - f(x+a)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2} - \frac{1}{4} - \sqrt{f(x) - f(x)^2} - f(x) + f(x)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x)^2 - f(x) + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} + f(x) - \frac{1}{2} \quad \text{car } f(x) - \frac{1}{2} \geq 0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$
>
> Donc ceci prouve que f est $2a$-périodique.

Limites

Exercice 5.5 (★★)

Déterminer les limites de :

$f_1 :\quad x \mapsto \dfrac{1-5x}{5+x}$ en -5, $+\infty$ et $-\infty$;

$f_2 :\quad x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{1+x}}$ en $+\infty$ et $-\infty$;

$f_3 :\quad x \mapsto \dfrac{3x^2 - x - 2}{x^4 - 1}$ en 1, $+\infty$ et $-\infty$;

$f_4 :\quad x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 1} - x + 2$ en $+\infty$;

$f_5 :\quad x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 9} + x - 3$ en $-\infty$.

Exercice 5.6 (★★)

1. Calculer la limite en 1 de $x \mapsto \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}$
2. Calculer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

(a) $x \mapsto x \sin\left(\dfrac{3}{x}\right)$; (b) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$.

3. Calculer les limites en 0 des fonctions suivantes :

(a) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+\sin(x))}{x}$; (b) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; (c) $x \mapsto \dfrac{e^{2x}-e^{-x}}{x}$.

Généralités sur les fonctions

Exercice 5.7 (★★)

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer les points fixes de f, c'est-à-dire les réels $x \in [0,1]$ tels que $f(x) = x$.
2. Montrer que $f \circ f$ est bien définie et que $f \circ f = f$.

1. Il est clair que 0 n'est pas un point fixe de f, et pour $x \in]0,1]$, alors x est un point fixe de f si, et seulement si :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leqslant 1$$

Et donc l'ensemble des points fixes de f est $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

2. Pour prouver que $f \circ f$ est bien définie, il s'agit de prouver que f est à valeurs dans $[0,1]$. Si $x = 0$, alors $f(x) = 1 \in [0,1]$. Et si $x \in [0,1]$, alors, par définition de la partie entière :

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x} \Rightarrow \underbrace{1-x}_{30} < x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1$$

Et donc $f(x) \in [0,1]$. Ainsi, $f \circ f$ est bien définie.

Soit $x \in [0,1]$. Prouver que pour tout $x \in [0,1]$, $f(f(x)) = f(x)$ revient à prouver que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x)$ est un point fixe de f. Soit encore, d'après la question 1, que $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Soit donc $x \in [0,1]$.

- Si $x = 0$, on a $f(x) = 1$ qui est un point fixe de f.
- Si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, alors $f(x) = x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
- Si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ [, alors nous avons déjà prouvé à la question 1 que $1 - x < f(x) \leqslant 1$. Or, $x \leqslant \frac{1}{2}$ et donc $1 - x \geqslant \frac{1}{2}$, de sorte que $1 - x < f(x) \Rightarrow \frac{1}{2} < f(x)$. Et donc $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Ainsi, nous avons prouvé que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, et donc $f(f(x)) = f(x)$. On en déduit que $f \circ f = f$.

Exercice 5.8 (★★)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ soit croissante et $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

> Procédons à un raisonnement par l'absurde en supposant que f ne soit pas strictement décroissante. Cela signifie qu'il existe donc deux réels x et y vérifiant $x < y$ et $f(x) \leqslant f(y)$. Mais alors, en appliquant $f \circ f$ (qui est croissante) à cette inégalité, il vient :
>
> $$(f \circ f)(f(x)) \leqslant (f \circ f)(f(y)) \Leftrightarrow (f \circ f \circ f)(x) \leqslant (f \circ f \circ f)(y)$$
>
> Mais ceci contredit la stricte décroissance de $f \circ f \circ f$. En effet, puisque $x < y$, nécessairement $(f \circ f \circ f)(x) > (f \circ f \circ f)(y)$
> C'est donc que notre hypothèse de départ est fausse : f est bien strictement décroissante.

Exercice 5.9 (Une équation fonctionnelle (Oral Polytechnique) - ★★★★)

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ qui tendent vers 0 en $+\infty$ et telles que pour tous réels strictement positifs x et y : $f(xf(y)) = yf(x) \quad (\mathscr{R})$.

1. Montrer que $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est solution du problème posé.
2. Prouver que si f est une fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé, alors le seul éventuel point fixe de f (c'est-à-dire la seule solution éventuelle de l'équation $f(x) = x$) est 1 .
3. En déduire que g est la seule solution au problème posé.

> 1. C'est une vérification immédiate.
> 2. Si f est une solution, et si α est un point fixe de f, alors $f(\alpha) = \alpha$.
>
>   Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on obtient en prenant $y = \alpha$ dans $(\mathscr{R})$, $f(x\alpha) = \alpha f(x)$.
>
>   Mais alors, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,
>
> $$f\left(x\alpha^2\right) = f((x\alpha)\alpha) = \alpha f(x\alpha) = \alpha^2 f(x).$$
>
>   Puis de même, $f\left(x\alpha^3\right) = \alpha f\left(x\alpha^2\right) = \alpha^3 f(x)$. Une récurrence facile prouve alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}_+^*$:
>
> $$f\left(x\alpha^n\right) = \alpha^n f(x).$$
>
>   Étudions les deux cas suivants :
>
>   - supposons que $\alpha > 1$. Alors $x\alpha^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc par hypothèse, $f\left(x\alpha^n\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
>   Mais $f\left(x\alpha^n\right) = \alpha^n f(x)$. Or, f étant supposée à valeurs dans $\mathbf{R}_+^+$, $f(x)$ est non nul, et donc $\alpha^n f(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où une contradiction.
>   Donc déjà, on ne peut pas avoir $\alpha > 1$.
>   - Supposons à présent $\alpha < 1$. On a toujours $f\left(x\alpha^n\right) = \alpha^n f(x)$, mais cette fois, $\alpha^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui ne nous avance pas beaucoup...
>   On a alors $\alpha = f(\alpha) = f(1 \times \alpha) = f(1f(\alpha)) = \alpha f(1)$. Et donc en divisant par α, $f(1) = 1$. Et alors :
>
> $$1 = f(1) = f\left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right) = f\left(\frac{1}{\alpha}f(\alpha)\right) = \alpha f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

de sorte que $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}$. Et donc $\frac{1}{\alpha}$ est également un point fixe de f. Or, $\frac{1}{\alpha} > 1$, et nous avons déjà dit qu'il ne pouvait y avoir de points fixes supérieurs strictement à 1. Donc il n'y a pas non plus de points fixes de f dans $]0, 1[$.

Le seul point fixe éventuel de f est 1.

3. Nous n'avons pas encore dit qu'une fonction f solution au problème posé possède un point fixe ! Mais notons que si $x \in \mathbf{R}_+^*$, alors en prenant $y = x$ dans la relation $(\mathscr{R})$, on a $f(xf(x)) = xf(x)$.

   Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $xf(x)$ est un point fixe de f, qui possède donc au moins un point fixe. Et d'après la question précédente, ce point fixe ne peut être que 1. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^+$:
$$xf(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x} = g(x).$$
   Et donc g est la seule fonction qui satisfait aux conditions de l'énoncé.

Dérivées

Exercice 5.10 (★)

Étudier le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad f_2 : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}} \qquad f_3 : x \mapsto \frac{1}{(\cos(x)+1)^4} \qquad f_4 : x \mapsto \sin\left(\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+3}\right)\right)$$

Exercice 5.11 (★)

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $f_m(x) = \dfrac{x+m}{x^2+1}$. On note $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de f_m.

1. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 0 sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 1 sont concourantes.

Exercice 5.12 (★★ - ✍)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$. Calculer $f^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Plus généralement, si f est une fonction polynomiale de degré n, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:
   - si $k \leq n$, $f^{(k)}$ est polynomiale de degré k ;
   - si $k \geq n+1$, $f^{(k)}$ est la fonction nulle.

Exercice 5.13 (★★)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa dérivée n-ème pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$f_1 : \quad x \mapsto e^{ax+b}$, $a \neq 0$;

$f_2 : \quad x \mapsto \dfrac{2}{1+3x}$;

$f_3 : \quad x \mapsto \sin(x)$.

Étude de fonctions et inégalités

Exercice 5.14 (★★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \left(2x + 1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$.

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. Étudier la dérivabilité de ce prolongement.
2. Déterminer les asymptotes au graphe de f.

Exercice 5.15 (★★)

Étudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2-2x}{3+x^2}}$.
Est-elle bornée ? Possède t-elle des extrema sur son ensemble de définition?

Exercice 5.16 (★★)

Montrer que, pour x et y strictement positifs : $x \ln x + y \ln y \leq (x+y)\ln(x+y)$.

> On fixe $y > 0$, et on étudie la fonction $f_y : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (x+y)\ln(x+y) - x\ln(x) - y\ln(y)$. Elle est continue et dérivable sur son ensemble de définition, et pour tout $x > 0$:
>
> $$f_y'(x) = \ln(x+y) + 1 - (\ln(x)+1) = \ln\left(\frac{x+y}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right) > 0.$$
>
> Donc f_y est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et par croissances comparées :
>
> $$\lim_{x \to 0^+} f_y(x) = y\ln(y) - 0 - y\ln(y) = 0.$$
>
> Par conséquent, $f_y(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$. Et on a bien établi l'inégalité voulue pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.17 (★★)

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

1. Prouver l'inégalité $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout nombre positif x.
2. Encadrer $\ln(u_n)$, puis déduire les limites de $\ln(u_n)$ et de u_n.

> 1. On obtient ces inégalités en étudiant successivement les fonctions $f_1 : x \mapsto \ln(1+x) - x$ et $f_2 : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.
> 2. Soit $n \geq 1$, et soit $k \in [\![1, n]\!]$. On obtient en appliquant l'inégalité précédente pour $x = \frac{k}{n^2}$:
>
> $$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}.$$
>
>   Sommons ces inégalités pour k allant de 1 à n :
>
> $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

ce qui se récrit :

$$\underbrace{\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}}_{=v_n} \leq \ln(u_n) \leq \underbrace{\frac{n(n+1)}{2n^2}}_{w_n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} - \frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{12n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{1}{2}$.

Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)$ existe et est égale à $\dfrac{1}{2}$. Par composition par l'exponentielle qui est continue en $\dfrac{1}{2}$, on en déduit que (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{1/2}$.

Bijections

Exercice 5.18 (★)
Montrer que la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-3} \end{array}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ sur un ensemble à préciser. Déterminer alors f^{-1}.

Exercice 5.19 (★★)
Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J\setminus\{1\}$ et que pour tout $x \in J\setminus\{1\}$, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Exercice 5.20 (★★)
On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f et étudier sa parité.

2. Étudier les variations de la fonction f et préciser ses limites aux bornes de $\mathscr{D}$.

3. Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$ admet une application réciproque qu'on notera g.

4. Donner le domaine de définition de g, son domaine de continuité ainsi que son sens de variation.

5. Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.

6. Expliciter la fonction g.

Exercice 5.21 (★★)
Soit $a > 0$, soit I une partie de $\mathbb{R}$, et soit $f :]-a, a[\to I$ une fonction impaire réalisant une bijection de $]-a, a[$ sur I. Montrer que f^{-1} est encore impaire. Que dire si f est paire ?

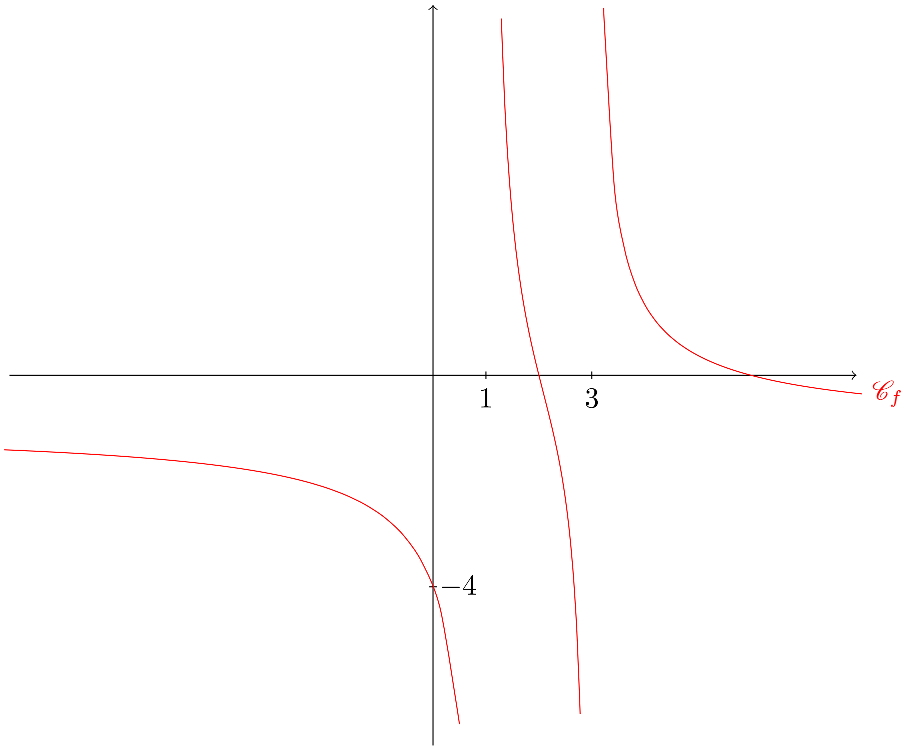
Avant toute chose, remarquons que I doit être symétrique pour que la notion d'imparité possède bien un sens.
Soit donc $x \in I$. Alors $f\left(-f^{-1}(x)\right) = -f\left(f^{-1}(x)\right) = -x$. Puisque $f^{-1}(x) \in]-a, a[$, alors $-f^{-1}(x) \in]-a, a[$, et donc $-x$ est bien l'image d'un élément de $]-a, a[$, donc il est dans I. Ceci prouve donc que I est nécessairement symétrique.
Mieux : nous venons de prouver que $-f^{-1}(x)$ est un antécédent de $-x$ par f. Mais f étant réalisant une bijection de $]-a, a[$ sur I, un tel antécédent est unique, et c'est $f^{-1}(-x)$. Et donc $f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$: la fonction f^{-1} est impaire.
Si f est paire, $f\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(-\frac{a}{2}\right)$, et donc ce nombre possède deux antécédents distincts par f. Donc f ne réalise pas une bijection de $]-a, a[$ sur I et par conséquent, f^{-1} n'existe pas.

Exercice 5.22 (★★★)
On considère la fonction $f(x) = \dfrac{-x^2+8x-12}{x^2-4x+3}$.

1. Étudier la fonction f et construire sa courbe représentative.
2. Pour tout nombre réel r, on considère l'ensemble $f^{-1}(\{r\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = r\}$.
   Montrer qu'il contient en général deux éléments, et préciser les cas d'exception.
3. On considère la fonction g définie par $g(x) = \max f^{-1}(\{f(x)\})$.
   Étudier la fonction g et construire sa courbe représentative.

1. Commençons par écrire f sous forme factorisée, ce qui facilitera son étude :
   $$f(x) = -\frac{(x-2)(x-6)}{(x-1)(x-3)}.$$
   La fonction f est bien définie lorsque le quotient a un sens, c'est-à-dire lorsque $x \neq 1, 3$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1, 3\}$. De plus, f est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de fonctions dérivables. On obtient alors après simplification que pour tout $x \neq 1, 3$:
   $$f'(x) = -2\frac{2x^2-9x+12}{(x-1)^2(x-3)^2}.$$
   Le discriminant du polynôme au numérateur étant strictement négatif, $f'(x) < 0$ pour tout $x \neq 1, 3$, et f est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$.

   On détermine les limites de f aux bords de son ensemble de définition. Écrivons :
   $$\frac{-x^2+8x-12}{x^2-4x+3} = \frac{-1+\frac{8}{x}-\frac{12}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}.$$
   D'où $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$.
   On obtient les limites en 1 et en 3 grâce à l'expression factorisée de f :
   $$f(x) = -\frac{(x-2)(x-6)}{(x-1)(x-3)}.$$
   D'où $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$.
   On construit sa courbe représentative (on pourra utiliser la valeur $f(0) = -4$).



2. Pour tout nombre réel r, on considère l'ensemble $f^{-1}(\{r\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = r\}$.

Image réciproque d'ensemble.

$f^{-1}(\{r\})$ s'appelle l'image réciproque de l'ensemble $\{r\}$ par la fonction f. Il s'agit de l'ensemble des antécédents par f de r.

Par exemple, si f est la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$, alors :

$$f^{-1}(\{4\}) = \{2, -2\} \quad ; \quad f^{-1}(\{2\}) = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} \quad ; \quad f^{-1}(\{1\}) = \{1, -1\}$$

$$f^{-1}(\{0\}) = \{0\} \quad ; \quad f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset.$$

On fera attention à la notation f^{-1} : il ne s'agit pas ici de l'application réciproque de f. D'ailleurs f n'est pas supposée bijective ici (que ça soit la fonction carrée dans l'exemple, où la fonction f de l'exercice).

Montrons que cet ensemble contient en général deux éléments. Pour cela on va définir :

- f_1 la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 1[$,
- f_2 la restriction de f à l'intervalle $]1, 3[$,
- f_3 la restriction de f à l'intervalle $]3, +\infty[$.

On a montré que f_1 est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$. Par le théorème de la bijection, f_1 réalise une bijection de $]-\infty, 1[$ sur l'intervalle $f_1(]-\infty, 1[) =]-\infty, -1[$. On notera dans la suite f_1^{-1} sa bijection réciproque.

De même, on montre que :

- la fonction f_2 réalise une bijection de $]1, 3[$ sur l'intervalle $f_2(]1, 3[) =]-\infty, +\infty[$. On notera dans la suite f_2^{-1} sa bijection réciproque ;

- la fonction f_3 réalise une bijection de $]3,+\infty[$ sur l'intervalle $f_3(]3,+\infty)=]+\infty,-1[$. On notera dans la suite f_3^{-1} sa bijection réciproque.

Soit $r \in \mathbb{R}$, on a trois cas possibles :

- soit $r > -1$: alors d'après ce qu'on a fait, les équations $f_2(x) = r$ et $f_3(x) = r$ admettent une unique solution chacune, respectivement $\alpha_2 = f_2^{-1}(r)$ et $\alpha_3 = f_3^{-1}(r)$, tandis que l'équation $f_1(x) = r$ n'a pas de solution. On a donc dans ce cas :
$$f^{-1}(\{r\}) = \{\alpha_2, \alpha_3\}.$$
Cet ensemble contient donc dans ce cas 2 éléments.
- soit $r < -1$: alors les équations $f_1(x) = r$ et $f_2(x) = r$ admettent une unique solution chacune, respectivement $\alpha_1 = f_1^{-1}(r)$ et $\alpha_2 = f_2^{-1}(r)$, tandis que l'équation $f_3(x) = r$ n'a pas de solution. On a donc dans ce cas :
$$f^{-1}(\{r\}) = \{\alpha_1, \alpha_2\}.$$
Cet ensemble contient encore 2 éléments.
- soit $r = -1$: alors d'après ce qu'on a fait, l'équation $f_2(x) = r$ admet une unique solution notée $\beta = f_2^{-1}(r)$, tandis que les équations $f_1(x) = r$ et $f_3(x) = r$ n'ont pas de solution. On a donc dans ce cas :
$$f^{-1}(\{r\}) = \{\beta\}.$$
Cet ensemble contient cette fois 1 seul élément.

3. On considère la fonction g définie par $g(x) = \max f^{-1}(\{f(x)\})$.

   Le domaine de définition de g est le même que celui de f : en effet il faut et il suffit que $f(x)$ soit bien définie dans cette expression pour qu'elle ait un sens. De plus, $f^{-1}(\{f(x)\})$ est un ensemble contenant au moins un élément, l'élément x, et au plus deux comme nous l'avons vu à la question précédente. On a donc $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1,3\}$.

   Posons $r = f(x)$. Plusieurs cas se présentent :

   - si $x < 1$, alors $r = f(x) < -1$. Dans ce cas, on a vu que :
   $$f^{-1}(\{r\}) = \{\alpha_1, \alpha_2\} = \{f_1^{-1}(r), f_2^{-1}(r)\}$$
   et puisque $f_1^{-1}(r) < f_2^{-1}(r)$, on obtient : $\quad g(x) = f_2^{-1}(r) = f_2^{-1}(f(x))$.
   - si $1 < x < \beta$, alors $r = f(x) > -1$. Dans ce cas, on a vu que :
   $$f^{-1}(\{r\}) = \{\alpha_2, \alpha_3\} = \{f_2^{-1}(r), f_3^{-1}(r)\}$$
   et puisque $f_2^{-1}(r) < f_3^{-1}(r)$, on obtient : $g(x) = f_3^{-1}(r) = f_3^{-1}(f(x))$.
   - si $x = \beta$, alors $r = f(\beta) = -1$. Dans ce cas, on a vu que :
   $$f^{-1}(\{r\}) = \{\beta\}.$$
   On obtient donc : $g(\beta) = \beta$.

- si $\beta < x < 3$, alors $r = f(x) < -1$. Dans ce cas, on a vu que :

$$f^{-1}(\{r\}) = \{\alpha_1, \alpha_2\} = \{f_1^{-1}(r), f_2^{-1}(r)\}$$

et puisque $f_1^{-1}(r) < f_2^{-1}(r)$, on obtient :

$$g(x) = f_2^{-1}(r) = f_2^{-1}(f(x)) = f_2^{-1}(f_2(x)) = x.$$

- enfin si $x > 3$, alors $r = f(x) > -1$. Dans ce cas, on a vu que :

$$f^{-1}(\{r\}) = \{\alpha_2, \alpha_3\} = \{f_2^{-1}(r), f_3^{-1}(r)\}$$

et puisque $f_2^{-1}(r) < f_3^{-1}(r)$, on obtient :

$$g(x) = f_3^{-1}(r) = f_3^{-1}(f(x)) = f_3^{-1}(f_3(x)) = x.$$

Je vous laisse alors tenter de représenter la courbe représentative de g.