

Rappels et compléments sur les fonctions

Parité, périodicité

Exercice 5.1 (★ - 📖)

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que :

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. si f est paire, alors $g \circ f$ est paire. 2. si f et g sont impaires, alors $g \circ f$ est impaire. | <ol style="list-style-type: none"> 3. si f est impaire et g est paire, alors $g \circ f$ est paire. 4. si f est périodique, alors $g \circ f$ est périodique. (★) En est-il de même pour $f \circ g$? |
|--|--|

Exercice 5.2 (★★)

1. Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - \frac{\lfloor x \rfloor}{k}$ est k -périodique.
2. Que dire d'une fonction périodique et croissante ? D'une fonction périodique et strictement croissante ?

Exercice 5.3 (★★)

Dans tout l'exercice, on se place dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Justifier que la symétrie par rapport à la droite (verticale) d'équation $x = \frac{a}{2}$ envoie un point de coordonnées (x, y) sur le point de coordonnées $(a - x, y)$.
2. Soit $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [0, a]$, $f(x) = f(a - x)$. Justifier alors que \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$.
3. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin(x) |2 \cos^2(x) - 1|$.
 - (a) Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 - (b) (★) Tracer le graphe de f sur $[-\pi, 2\pi]$.

Exercice 5.4 (★★★)

Soit $a > 0$, et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$.
Prouver que f est périodique.

Limites

Exercice 5.5 (★★)

Déterminer les limites de :

$$f_1 : x \mapsto \frac{1 - 5x}{5 + x} \text{ en } -5, +\infty \text{ et } -\infty ;$$

$$f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{1 + x}} \text{ en } +\infty \text{ et } -\infty ;$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{3x^2 - x - 2}{x^4 - 1} \text{ en } 1, +\infty \text{ et } -\infty ;$$

$$f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 1} - x + 2 \text{ en } +\infty ;$$

$$f_5 : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 9} + x - 3 \text{ en } -\infty.$$

Exercice 5.6 (★★)

1. Calculer la limite en 1 de $x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

2. Calculer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$(a) \quad x \mapsto x \sin\left(\frac{3}{x}\right); \quad \left| \quad (b) \quad x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}.$$

3. Calculer les limites en 0 des fonctions suivantes :

$$(a) \quad x \mapsto \frac{\ln(1+\sin(x))}{x}; \quad \left| \quad (b) \quad x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}; \quad \left| \quad (c) \quad x \mapsto \frac{e^{2x}-e^{-x}}{x}.$$

Généralités sur les fonctions**Exercice 5.7 (★★)**

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \begin{cases} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

- Déterminer les points fixes de f , c'est-à-dire les réels $x \in [0, 1]$ tels que $f(x) = x$.
 - Montrer que $f \circ f$ est bien définie et que $f \circ f = f$.
-

Exercice 5.8 (★★)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ soit croissante et $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 5.9 (Une équation fonctionnelle (Oral Polytechnique) - ★★★★★)

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ qui tendent vers 0 en $+\infty$ et telles que pour tous réels strictement positifs x et y : $f(xf(y)) = yf(x)$ (\mathcal{R}).

- Montrer que $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est solution du problème posé.
 - Prouver que si f est une fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé, alors le seul éventuel point fixe de f (c'est-à-dire la seule solution éventuelle de l'équation $f(x) = x$) est 1.
 - En déduire que g est la seule solution au problème posé.
-

Dérivées**Exercice 5.10 (★)**

Étudier le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad f_2 : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}} \quad f_3 : x \mapsto \frac{1}{(\cos(x)+1)^4} \quad f_4 : x \mapsto \sin\left(\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+3}\right)\right)$$

Exercice 5.11 (★)

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $f_m(x) = \frac{x+m}{x^2+1}$. On note \mathcal{C}_m la courbe représentative de f_m .

- Montrer que les tangentes aux courbes \mathcal{C}_m au point d'abscisse 0 sont parallèles.

2. Montrer que les tangentes aux courbes \mathcal{C}_m au point d'abscisse 1 sont concourantes.

Exercice 5.12 (★★ - 📌)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$. Calculer $f^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Plus généralement, si f est une fonction polynomiale de degré n , montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- si $k \leq n$, $f^{(k)}$ est polynomiale de degré k ;
- si $k \geq n + 1$, $f^{(k)}$ est la fonction nulle.

Exercice 5.13 (★★)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa dérivée n -ème pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$f_1 : x \mapsto e^{ax+b}, a \neq 0 ; \quad \left| \quad f_2 : x \mapsto \frac{2}{1+3x} ; \quad \left| \quad f_3 : x \mapsto \sin(x).$$

Étude de fonctions et inégalités

Exercice 5.14 (★★)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \left(2x + 1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$.

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur \mathbb{R}_+ . Étudier la dérivabilité de ce prolongement.
2. Déterminer les asymptotes au graphe de f .

Exercice 5.15 (★★)

Étudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2-2x}{3+x^2}}$.

Est-elle bornée ? Possède-t-elle des extrema sur son ensemble de définition ?

Exercice 5.16 (★★)

Montrer que, pour x et y strictement positifs : $x \ln x + y \ln y \leq (x+y) \ln(x+y)$.

Exercice 5.17 (★★)

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

1. Prouver l'inégalité $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout nombre positif x .
2. Encadrer $\ln(u_n)$, puis déduire les limites de $\ln(u_n)$ et de u_n .

Bijections

Exercice 5.18 (★)

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ sur un ensemble à préciser. Déterminer alors f^{-1} .

Exercice 5.19 (★★)

Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et que pour tout $x \in J \setminus \{1\}$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Exercice 5.20 (★★)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition \mathcal{D} de f et étudier sa parité.
2. Étudier les variations de la fonction f et préciser ses limites aux bornes de \mathcal{D} .
3. Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$ admet une application réciproque qu'on notera g .
4. Donner le domaine de définition de g , son domaine de continuité ainsi que son sens de variation.
5. Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g .
6. Expliciter la fonction g .

Exercice 5.21 (★★)

Soit $a > 0$, soit I une partie de \mathbb{R} , et soit $f :]-a, a[\rightarrow I$ une fonction impaire réalisant une bijection de $] - a, a[$ sur I . Montrer que f^{-1} est encore impaire. Que dire si f est paire ?

Exercice 5.22 (★★★)

On considère la fonction $f(x) = \frac{-x^2 + 8x - 12}{x^2 - 4x + 3}$.

1. Étudier la fonction f et construire sa courbe représentative.
2. Pour tout nombre réel r , on considère l'ensemble $f^{-1}(\{r\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = r\}$.
Montrer qu'il contient en général deux éléments, et préciser les cas d'exception.
3. On considère la fonction g définie par $g(x) = \max f^{-1}(\{f(x)\})$.
Étudier la fonction g et construire sa courbe représentative.