TD6

Systèmes linéaires

Systèmes linéaires

Exercice 6.1 (★)

Déterminer le rang, le nombre d'inconnues principales et secondaire des systèmes homogènes associés aux matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&-4\\3&1&5\\-1&0&-1\\0&2&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&-2&-2&0\\1&0&-2&2\\1&2&2&-2\\1&3&6&5\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\2&-1&3&1&-2\\3&9&11&-2&19\end{pmatrix}$$

Exercice 6.2 (★)

1. Résoudre la système :

$$(\mathscr{S}_0) : \begin{cases}x+y+z=0\\2x+y+2z=0\\x+2y+z=0\end{cases}$$

2. On considère le système :

$$(\mathscr{S}) : \begin{cases}x+y+z=3\\2x+y+2z=5\\x+2y+z=4\end{cases}$$

Vérifier que $(1,1,1)$ est solution de $(\mathscr{S})$ et en déduire toutes les solutions de $(\mathscr{S})$.

Exercice 6.3 (★)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants :

1. $\begin{cases}x+y+2z=5\\x-y-z=1\\x+z=3\end{cases}$

2. $\begin{cases}2x-3y+6z+2t=5\\y-2z+t=1\\z-3t=2\end{cases}$

3. $\begin{cases}x-3y+z=1\\2x+y+z=-1\\x+11y-z=5\end{cases}$

4. $\begin{cases}x+y-z+t=2\\2x-2y+z-2t=1\\-x+y+z-2t=-2\end{cases}$

5. $\begin{cases}3x+4y+z+2t=3\\6x+8y+2z+6t=7\\9x+12y+3z+10t=0\end{cases}$

6. $\begin{cases}x-2y+z+t=1\\2x+y-z=2\\3x-y+t=3\\4x-3y+z+2t=4\end{cases}$

Exercice 6.4 (★★)

L'espace est rapporté à $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. On considère dans l'espace les trois points $A(-1,2,1), B(1,-6,-1)$ et $C(2,2,2)$. Donner un système d'équations paramétriques du plan $\mathscr{P}$ défini par les points A,B,C, puis une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

2. Mêmes questions avec les points $A'(1,1,1)$, $B'(1,2,3)$ et $C'=(4,0,0)$.

3. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $\begin{cases}x+y-3z=-6\\-2x-4y+3z=-1\end{cases}$. Donner une écriture paramétrique de $\mathscr{D}$.

Systèmes linéaires à paramètres

Exercice 6.5 (★★)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}$, résoudre le système $\begin{cases} x+2y=0 \\ ax+3y=b \end{cases}$. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

Exercice 6.6 (★★)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants, en discutant suivant les valeurs des paramètres a et b ou m

1. $\begin{cases} 2x+y-3z=a \\ 3x+2y+z=a+3 \\ 7x+4y-5z=2a+5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} mx+y+z+t=1 \\ x+my+z+t=m \\ x+y+mz+t=m+1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-my+m^2z=m \\ mx-m^2y+mz=1 \\ mx+y-m^3z=1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+ay+bz=0 \\ ax+y+bz=0 \\ bx+ay+z=0 \end{cases}$

Exercice 6.7 (★★)

L'espace est rapporté à $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Discuter, suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$, l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $\begin{cases} mx+2y+3z=3 \\ (m-1)x+my+z=1 \end{cases}$ et du plan $\mathscr{P}$ d'équation $(m+1)x+my+(m-1)z=m-1$.

Exercice 6.8 (★★)

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe une même droite contenue dans les trois plans définis par les équations suivantes :

$$\begin{array}{lcl} (P_1) & : & (1-a)x-2y+z=0 \\ (P_2) & : & 3x-(1+a)y-2z=0 \\ (P_3) & : & 3x-2y-(1+a)z=0 \end{array}$$
