TD7

Fonctions usuelles

Logarithme - Exponentielle - Puissances

Exercice 7.1 (★★)

Résoudre les équations suivantes, d'inconnues $x \in \mathbb{R}$:

(i) $2^{x^2} = 3^{x^3}$;

(ii) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{x}$;

(iii) $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$;

(iv) $4^{x+1} + 2^{2-x} = 65$

(v) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$;

(vi) $\frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(a)}{\ln(x)}$, avec $a > 0, a \neq 1$.

Exercice 7.2 (★★)

Résoudre les systèmes suivants :

$$\mathscr{S}_1 : \begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} \qquad \mathscr{S}_2 : \begin{cases} x + y = 7 \\ \log(x) + \log(y) = 1 \end{cases} \qquad \mathscr{S}_3 : \begin{cases} xy = a^2 \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2}(\ln a)^2 \end{cases}$$

Exercice 7.3 (★★)

Montrer que $x^x(1-x)^{1-x} \geq \dfrac{1}{2}$ pour $x \in]0,1[$.

Exercice 7.4 (★★)

Calculer les limites suivantes :

(i) $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x)\ln(\ln(x))$;

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{2x}$;

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{e^x - 1}$;

(iv) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$;

(v) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}$ (avec $1 < a < b$) ;

(vi) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

Exercice 7.5 (★★)

On pose $f(x) = x^x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f, et étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$.
3. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0. Déterminer la limite du taux d'accroissement en 0. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
4. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 7.6 (★ - Nombre de chiffres de l'écriture décimale d'un entier)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10 est égal à $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$.

Exercice 7.7 (★★)

1. Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:
$$f(xy) = f(x) + f(y).$$
2. Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

Exercice 7.8 (★★)

Étudier puis représenter la fonction définie par $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Fonctions hyperboliques

Exercice 7.9 (★)

Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(i) $\mathrm{sh}(x) \leq 2$

(ii) $\mathrm{ch}(x) = 3$

(iii) $7\mathrm{ch}x + 2\mathrm{sh}x = 9$

Exercice 7.10 (★)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

(i) $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$;

(ii) $\mathrm{ch}(x) = \sqrt{\dfrac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2}}$;

(iii) $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)$;

(iv) $\mathrm{sh}(x) = \frac{2\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\mathrm{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Exercice 7.11 (★★)

1. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(a+kb)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(a+kb)$.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{ch}(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Fonctions circulaires

Exercice 7.12 (★★)

Donner le domaine de définition et calculer la dérivée de $f : x \mapsto (1+\sin x)^{\cos x}$.

Exercice 7.13 (★)

Étudier et tracer l'allure du graphe de $f : x \mapsto \mathrm{cotan}x = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Exercice 7.14 (★★★★)

Pour $x \in \mathbb{R}$, comparer $\cos(\sin(x))$ et $\sin(\cos(x))$.

Fonctions circulaires réciproque

Exercice 7.15 (★)

Calculer les nombres suivants :

(i) $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$;

(ii) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

(iii) $\arccos\left(\cos\left(\frac{22\pi}{7}\right)\right)$;

(iv) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$;

(v) $\arccos\left(\sin\left(\frac{19\pi}{3}\right)\right)$;

(vi) $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$;

Exercice 7.16 (★★)

Calculer $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{1}{8}\right)$.

Exercice 7.17 (★★)

Montrer les identités suivantes :

(i) $2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)=\arccos\left(\frac{1}{8}\right)$;

(ii) $2\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)=\arccos\left(\frac{7}{25}\right)$;

(iii) $\arccos\left(\frac{5}{13}\right)=2\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$.

Exercice 7.18 (★★)

Simplifier les expressions suivantes, en précisant les valeurs de x pour lesquelles elles ont un sens :

(i) $\cos(\arctan x)$;

(ii) $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos(x)\right)$;

(iii) $\sin(3\arctan x)$;

(iv) $\tan(\arcsin x)$;

(v) $\arccos(x)+\arccos(-x)$.

Exercice 7.19 (★★)

Tracer le graphe de la fonction $f : x\mapsto \arccos(\cos(x))-\frac{1}{2}\arccos(\cos(2x))$.

Exercice 7.20 (★★)

Pour $x\geq 0$, on pose $f(x)=\arccos\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)$.

1. Vérifier que f est bien définie.
2. Justifier que tout réel positif x peut s'écrire de manière unique sous la forme $x=\tan^2(\theta/2)$, avec $0\leq\theta<\pi$.
3. Montrer alors que pour tout $x\geq 0$, $f(x)=2\arctan(\sqrt{x})$.

Exercice 7.21 (★★)

Soit $f : x\mapsto \arcsin(x)+\arcsin(2x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
2. Calculer la valeur de $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. Montrer que l'équation $f(x)=\frac{\pi}{2}$ possède une unique solution.

4. Déterminer cette solution.

Exercice 7.22 (★★)

À l'aide de calculs de dérivées, prouver les formules suivantes :

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ 2\arctan(\sqrt{1+x^2}-x)+\arctan(x)=\dfrac{\pi}{2}$;

(ii) $\forall x \in\ ]-1,1[,\ \arcsin x = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

(iii) $\forall x \in [0,1],\ \arcsin(\sqrt{x}) = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arcsin(2x-1)$.

Exercice 7.23 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la somme S_n en posant : $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$.

1. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1)-\arctan x$.
2. En déduire la valeur de S_n. Déterminer alors la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7.24 (★★)

1. Simplifier $\arctan(\mathrm{sh}(x))+\arccos(\mathrm{th}(x))$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $\mathrm{th}(x) = \frac{5}{13}$.
3. En déduire que $\arctan\left(\frac{5}{12}\right)+\arccos\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 7.25 (★★★)

1. Soit x et y deux réels tels que $0<x<y$. Calculer $\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)+\arctan\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right)$.
2. Calculer $4\arctan\dfrac{1}{5}$.
3. À l'aide des questions précédentes, montrer la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Cette formule permit à John Machin de calculer cent décimales de π en 1706.

Exercice 7.26 (★★★)

Résoudre l'équation $\arctan(x-1)+\arctan(x)+\arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 7.27 (Oral Polytechnique - ★★★★)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = x \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+(u_0+\cdots+u_n)^2}$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{u_n}$. *On pourra noter* $\theta_n = \mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{u_n}$.
