DM10

# Devoir maison à rendre le 08/04/16

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

## Intégrales de Wallis et intégrale de Gauss

On appelle intégrale de Gauss la limite $I = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt$ qu'on notera encore $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

*Le but de ce problème est de justifier l'existence et de calculer la valeur de l'intégrale de Gauss.*

## I. Intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx.$$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$.
2. Calculer $W_0$ et $W_1$.
3. Montrer que la suite $(W_n)$ est décroissante en déduire qu'elle converge.
4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \neq 0$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n.$$

6. Montrer que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et calculer la valeur de cette constante.
7. En utilisant la monotonie de la suite $(W_n)$, prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

   En déduire que $W_n \underset{n}{\sim} W_{n+1}$.

8. Déduire des questions précédentes que $W_n \underset{n}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} W_n$.
9. Montrer que pour tout $p \geq 0$, on a :

$$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}, \\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{cases}$$

## II. Intégrale de Gauss

On pose $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt \end{array}$.

1. Montrer que $F$ est strictement croissante.
2. Pour $x \in [1, +\infty[$, montrer que $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.
3. En déduire que $F$ est majorée puis que $F$ admet une limite en $+\infty$.

   *Dans toute la suite, on notera* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ *cette limite.*

4. Montrer que : $\forall u \in ]-1, +\infty[$, $\ln(1+u) \leq u$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$.
   (b) En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos u$, montrer que :
   $$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx.$$
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-t^2} \leq \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.
   (b) En posant le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan u$, montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_0^B \cos^{2p}(t) dt$ où $B \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $p \in \mathbb{N}$ sont à déterminer.
   (c) Montrer que $\displaystyle\int_0^B \cos^{2p}(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}-B}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t) dt$.
   (d) Déduire des questions précédentes que :
   $$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} W_{2n-2}.$$
7. Déterminer alors la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

---