DM11

Correction du devoir maison

Suite des noyaux et images itérés

I. Étude d'un exemple

Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$u(e_1) = 0 \quad , \quad u(e_2) = e_1 + 2e_2 + 3e_3 \quad , \quad u(e_3) = e_1.$$

1. Tout d'abord, rappelons qu'une telle application linéaire u existe et est unique (cours - définition d'une application linéaire par l'image d'une base).

   - $k = 0$. Alors $u^0 = Id_E$, et $N_0 = Ker(Id_E) = \{0_E\}$, $I_0 = Im(Id_E) = E$.
   - $k = 1$. On détermine $N_1 = Ker(u)$ pour commencer : soit $x = ae_1 + be_2 + ce_3 \in \mathbb{R}^3$, on a :

     $$\begin{aligned} u(x) = 0_E &\Leftrightarrow b(e_1 + 2e_2 + 3e_3) + ce_1 = 0_E \\ &\Leftrightarrow (b + c)e_1 + 2be_2 + 3be_3 = 0_E \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (b + c) = 0 \\ 2b = 0 \\ 3b = 0 \end{cases} \qquad \text{par liberté de la famille } (e_1, e_2, e_3) \\ &\Leftrightarrow b = c = 0 \end{aligned}$$

     Ainsi, on a $Ker(u) = \{ae_1, a \in \mathbb{R}\} = Vect(e_1)$.
     On détermine à présent $Im(u)$. D'après le cours, on a :

     $$Im(u) = Vect(u(e_1), u(e_2), u(e_3)) = Vect((e_1 + 2e_2 + 3e_3), e_1).$$

     Enfin une base de N_1 est donnée par (e_1) (un vecteur non nul donc libre, et génératrice), et une base de I_1 est donnée par $((e_1 + 2e_2 + 3e_3), e_1)$ (deux vecteurs non colinéaires donc famille libre, et génératrice).
   - $k = 2$. On a :

     $$u^2(e_1) = 0_E, \quad u^2(e_2) = u(e_1+2e_2+3e_3) = 2(e_1+2e_2+3e_3)+3e_1 = 5e_1+4e_2+6e_3, \quad u^2(e_3) = 0_E.$$

     Déterminons maintenant $N_2 = Ker(u^2)$. Soit $x = ae_1 + be_2 + ce_3 \in \mathbb{R}^3$, on a :

     $$\begin{aligned} u^2(x) = 0_E &\Leftrightarrow b(5e_1 + 4e_2 + 6e_3) = 0_E \\ &\Leftrightarrow b = 0 \text{ car } 5e_1 + 4e_2 + 6e_3 \neq 0_E \text{ car cette famille est libre !} \end{aligned}$$

     Ainsi, on a $Ker(u) = \{ae_1 + ce_3, a, c \in \mathbb{R}\} = Vect(e_1, e_3)$.
     Déterminons $I_2 = Im(u^2)$:

     $$Im(u^2) = Vect(u^2(e_1), u^2(e_2), u^2(e_3)) = Vect(5e_1 + 4e_2 + 6e_3).$$

     Enfin une base de N_2 est donnée par (e_1, e_3) et une base de I_2 est donnée par $(5e_1+4e_2+6e_3)$.

- $k \geq 3$. On a :

  $$u^3(e_1) = 0_E, \quad u^3(e_2) = u(5e_1+4e_2+6e_3) = 4(e_1+2e_2+3e_3)+6e_1 = 2(5e_1+4e_2+6e_3), \quad u^2(e_3) = 0_E.$$

  On montre alors de même que précédemment que $N_3 = Vect(e_1, e_3)$ et $I_3 = Vect(5e_1 + 4e_2 + 6e_3)$.
  Plus généralement, on montre par récurrence que pour tout $k \geq 3$:

  $$u^k(e_1) = 0_E, \quad u^k(e_2) = 2^{k-2}(5e_1 + 4e_2 + 6e_3), \quad u^k(e_3) = 0_E,$$

  et que $N_k = Vect(e_1, e_3)$ et $I_k = Vect(5e_1 + 4e_2 + 6e_3)$.

2. On a déjà que $\dim(N_2) = 2$ et $\dim(I_2) = 1$, donc $\dim(N_2) + \dim(I_2) = 3$. Soit à présent $x \in I_2 \cap N_2$. Alors il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

   $$x = \lambda e_1 + \mu e_3 = \nu(5e_1 + 4e_2 + 6e_3)$$

   Alors :

   $$(\lambda - 5\nu)e_1 + (-4\nu)e_2 + (\mu - 6\nu)e_3 = 0_E$$

   Puisque la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, on en déduit $\begin{cases} \lambda - 5\nu = 0 \\ -4\nu = 0 \\ \mu - 6\nu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$. Ainsi $x = 0_E$ et on a montré que $N_2 \cap I_2 = \{0_E\}$ (l'inclusion $N_2 \cap I_2 \supset \{0_E\}$ étant immédiate). Finalement on a bien que :

   $$E = N_2 \oplus I_2.$$

3. On a $N_2 = Vect(e_1, e_3)$, et $u(e_1) = 0_E$, $u(e_3) = e_1$. Ainsi $u(N_2) \subset N_2$ et la restriction de u à N_2 est bien un endomorphisme de N_2. Il est de plus nilpotent puisqu'on a $u^2(e_1) = 0_E = u^2(e_3)$. Comme enfin $u(e_3) = e_1 \neq 0_E$, son indice de nilpotence est 2.

   On a vu que $I_2 = Vect(5e_1 + 4e_2 + 6e_3)$ et que $u(5e_1 + 4e_2 + 6e_3) = 2(5e_1 + 4e_2 + 6e_3)$. Donc la restriction de u à I_2 est bien une homothétie de rapport 2.

II. Monotonie

Rappel. Un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E est **stable par** $u \in \mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$.

Important. Lorsqu'un sous-espace vectoriel F est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, u induit un endomorphisme de F. Il est souvent très utile de considérer cet endomorphisme induit !

1. On va montrer le résultat général suivant (Exercice 7 de la feuille de TD20) :

   Propriété. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes qui commutent, c'est à dire $f \circ g = g \circ f$. Alors $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont stables par g.

   Preuve.

   - $g(Ker(f)) \subset Ker(f)$. Soit $x \in Ker(f)$, on a :

     $$f(x) = 0_E \Rightarrow g(f(x)) = 0_E \Rightarrow f(g(x)) = 0_E.$$

     Ainsi on a bien $g(x) \in Ker(f)$.

- $g(Im(f)) \subset Im(f)$. Soit $y \in Im(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors on a :

$$g(y) = g(f(x)) = f(g(x)) \in Im(f).$$

Le résultat s'en suit immédiatement : en effet pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k = Ker(u^k)$ et $I_k = Im(u^k)$ et u^k et u commutent bien. D'où le résultat par la propriété précédente.

2. - $N_k \subset N_{k+1}$. Soit $x \in N_k$, on a $u^k(x) = 0_E$. Alors en composant par u :

$$u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0_E) = 0_E.$$

Ainsi on a bien $x \in N_{k+1}$.

- $I_{k+1} \subset I_k$. Soit $y \in I_{k+1}$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^{k+1}(x)$. Mais alors on a :

$$y = u^k(u(x)) \in Im(u^k).$$

Ainsi on a bien $y \in I_k$.

3. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel k, $N_p = N_{p+k}$.

- La propriété est vraie pour $k = 0$ et $k = 1$ (par hypothèse).
- Soit $k \geq 1$ et supposons la propriété au rang k vraie, c'est à dire $N_p = N_{p+k}$. Puisqu'on a :

$$N_p \subset N_{p+1} \subset \cdots \subset N_{p+k},$$

on en déduit que $N_p = N_{p+1} = \cdots = N_{p+k}$.
Par la question précédente, on a déjà que $N_{p+k} \subset N_{p+k+1}$. Soit à présent $x \in N_{p+k+1}$. On a :

$$u^{p+k+1}(x) = 0_E \Rightarrow u^{p+k}(u(x)) = 0_E.$$

Ainsi on a $u(x) \in Ker(u^{p+k}) = Ker(u^{p+k-1})$ et donc :

$$u^{p+k-1}(u(x)) = 0_E \Rightarrow u^{p+k}(x) = 0_E.$$

Finalement on a bien $x \in Ker(u^{p+k})$ et donc $N_{p+k} \supset N_{p+k+1}$. D'où la propriété au rang $k + 1$.

On conclut par principe de récurrence.

4. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel k, $I_q = I_{q+k}$.

- La propriété est vraie au rang $k = 0$ et $k = 1$ (par hypothèse).
- Soit $k \geq 1$ et supposons la propriété au rang k vraie, c'est à dire $I_q = I_{q+k}$. Puisque :

$$I_{q+k} \subset I_{q+k-1} \subset \cdots \subset I_q,$$

alors on a $I_{q+k} = I_{q+k-1} = \cdots = I_q$.
Montrons que $I_{q+k+1} = I_{q+k}$. On a déjà l'inclusion $I_{q+k+1} \subset I_{q+k}$ par une question précédente. Montrons l'inclusion réciproque : soit $z \in I_{q+k}$, il existe donc $x \in E$ tel que $z = u^{q+k}(x) = u(u^{q+k-1}(x))$. Or $u^{q+k-1}(x)$ appartient à I_{q+k-1}, qui est égal à I_{q+k} par hypothèse. Donc il existe $y \in E$ tel que $u^{q+k-1}(x) = u^{q+k}(y)$. Ainsi on a bien :

$$z = u(u^{q+k-1}(x)) = u(u^{q+k}(y)) = u^{q+k+1}(y) \in I_{q+k+1}.$$

D'où finalement l'inclusion $I_{q+k+1} \supset I_{q+k}$, et donc la propriété au rang $k + 1$.

On conclut par principe de récurrence.

III. En dimension finie

1. La suite des dimensions (n_k) est une suite d'entiers naturels croissante d'après II.2., et majorée par $n = \dim(E)$. Elle est donc constante à partir d'un certain rang, et il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $n_s = n_{s+1}$. Dès lors on a :
$$\begin{cases} n_s = n_{s+1} \\ N_s \subset N_{s+1} \end{cases} \Rightarrow N_s = N_{s+1}.$$
Considérons p le plus petit entier tel que $N_p = N_{p+1}$ (un tel entier existe car $A = \{k \in \mathbb{N}/N_k = N_{k+1}\}$ est une partie non vide (contient s) de $\mathbb{N}$). Alors on a :
   - $\forall k \in [|0, p-1|], \quad N_k \neq N_{k+1}$ par définition de p.
   - $\forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq p \Rightarrow N_k = N_{k+1}$ grâce à la question II.3.
2. La suite des dimensions (i_k) est une suite d'entiers naturels décroissante d'après II.2.. Elle est donc constante à partir d'un certain rang, et il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $i_t = i_{t+1}$. Dès lors on a :
$$\begin{cases} i_t = i_{t+1} \\ I_{t+1} \subset I_t \end{cases} \Rightarrow I_t = I_{t+1}.$$
Considérons q le plus petit entier tel que $I_q = I_{q+1}$. Alors on a :
   - $\forall k \in [|0, q-1|], \quad I_k \neq I_{k+1}$ par définition de q.
   - $\forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq q \Rightarrow I_k = I_{k+1}$ grâce à la question II.4.
3. Par le théorème du rang appliqué à u^k, on a :
$$\dim(E) = rg(u^k) + \dim(Ker(u^k)) \quad \Rightarrow \quad n = i_k + n_k.$$
Or la suite (i_k) est strictement décroissante puis constante à partir du rang q, (n_k) est strictement croissante puis constante à partir du rang p. Comme enfin $\forall k \in \mathbb{N}, i_k = n - n_k$, on a bien que $p = q$.

   Enfin comme $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_p \leq n$, on a :
$$n = n_p - n_0 = \underbrace{(n_p - n_{p-1})}_{\geq 1} + \underbrace{(n_{p-1} - n_{p-2})}_{\geq 1} + \cdots + \underbrace{(n_1 - n_0)}_{\geq 1} \geq p.$$
4. On a déjà par le théorème du rang (appliqué à u^p que $\dim(E) = \dim(N_p) + \dim(I_p)$.

   Montrons que $N_p \cap I_p = \{0_E\}$. Soit $y \in N_p \cap I_p$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u^p(x)$. Alors on a :
$$u^p(y) = 0_E \quad \Rightarrow \quad u^{2p}(x) = 0_E.$$
Donc x appartient à $Ker(u^{2p})$, qui est égal à $Ker(u^p)$ par définition de p. On obtient :
$$y = u^p(x) = 0_E.$$
Ainsi $N_p \cap I_p = \{0_E\}$, et on a bien :
$$E = N_p \oplus I_p.$$
5. On sait déjà que u induit des endomorphismes sur N_p et I_p (car ces s.e.v sont stables par u).

   Considérons la restriction $\tilde{u}$ de u à N_p. Alors pour tout $x \in N_p$, $\tilde{u}^p(x) = u^p(x) = 0_E$. Ainsi $\tilde{u}$ est un endomorphisme nilpotent. Comme de plus $N_{p-1} \subsetneq N_p$, alors il existe $x \in N_p \setminus N_{p-1}$, et on a $\tilde{u}^{p-1}(x) = u^{p-1}(x) \neq 0_E$. Donc l'indice de nilpotence de $\tilde{u}$ est p.

   Considérons la restriction $\bar{u}$ de u à I_p. Montrons que $\bar{u}$ est un automorphisme de I_p. Comme on est en dimension finie, il suffit de montrer que $\bar{u}$ est injective. Soit donc $x \in I_p$ tel que $\bar{u}(x) = 0_E$. Alors on a :
$$u(x) = 0_E \quad \Rightarrow \quad x \in Ker(u).$$

Ainsi on a $x \in N_1 \cap I_p$. Or on a vu que $N_1 \subset N_p$, donc $x \in N_p \cap I_p = \{0_E\}$. On a donc bien $x = 0_E$, et $\bar{u}$ est bien un automorphisme de I_p.

Remarque. Dans la deuxième partie de cette question, on a procédé comme dans la preuve du théorème du rang.

6. (a) Par le théorème du rang appliqué à u^k, on a $n = i_k + n_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, on obtient :
$$\delta_k = i_k - i_{k+1} = (n - n_k) - (n - n_{k+1}) = n_{k+1} - n_k.$$
(b) On a montré que $I_{k+1} \subset I_k$. De plus I_k est de dimension finie. Par le cours, on obtient l'existence d'un supplémentaire D_k de I_{k+1} dans I_k :
$$I_k = I_{k+1} \oplus D_k.$$
En prenant les dimensions, on obtient $\dim(D_k) = i_k - i_{k+1} = \delta_k$.

(c) On a $I_{k+1} = u(I_k) = u(I_{k+1} + D_k) = u(I_{k+1}) + u(D_k) = I_{k+2} + u(D_k)$.
Justifions la troisième égalité, en montrant que si $u \in \mathcal{L}(E)$ et F, G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors :
$$u(F + G) = u(F) + u(G).$$
En effet pour $z \in E$, on a :
$$\begin{aligned} z \in u(F+G) &\Leftrightarrow \exists x \in (F+G), z = u(x) \\ &\Leftrightarrow \exists (x_1, x_2) \in F \times G, z = u(x_1 + x_2) \\ &\Leftrightarrow \exists (x_1, x_2) \in F \times G, z = u(x_1) + u(x_2) \\ &\Leftrightarrow z \in u(F) + u(G) \end{aligned}$$
(d) En prenant les dimensions on a :
$$\dim(I_{k+1}) = \dim(I_{k+2} + u(D_k)) \leq \dim(I_{k+2}) + \dim(u(D_k)) \leq \dim(I_{k+2}) + \dim(D_k).$$
Ainsi, on obtient $\delta_{k+1} = i_{k+1} - i_{k+2} \leq \dim(D_k) = \delta_k$. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que (δ_k) est décroissante.

(e) Soit u un endomorphisme nilpotent, et p son indice de nilpotence. On a alors :
$$\{0_E\} = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_p = E.$$
De plus, on a montré que ces inclusions sont strictes : en effet s'il existe $0 \leq k \leq p-1$ tel que $N_k = N_{k+1}$, alors $N_k = N_p = E$ et $u^k = 0$, ce qui contredirait le fait que p soit l'indice de nilpotence de u. **L'indice de nilpotence de u est donc également l'entier p à partir duquel la suite des noyaux itérés est constante.**
Par ce qu'on a fait, on a déjà que $p \leq n$ (on retrouve ici un résultat déjà obtenu dans le TD20 - Exercice 29).
On sait que (δ_k) est décroissante, et que $\delta_0 = \dim(Ker(u)) = 1$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\delta_k \leq 1$. Comme de plus pour tout $0 \leq k \leq p-1$, on a $\delta_k > 0$ (la suite des noyaux itérés est strictement décroissante entre $0 \leq k \leq p-1$) et que $\delta_k = 0$ si $k \geq p$ (la suite des noyaux itérée est constante pour $k \geq p$), on en déduit que :
$$\delta_k = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq k \leq p-1 \\ 0 \text{ si } k \geq p. \end{cases}$$
Finalement, on a :
$$\begin{aligned} n = n_p = n_p - n_0 &= (n_p - n_{p-1}) + (n_{p-1} - n_{p-2}) + \cdots + (n_1 - n_0) \\ &= \delta_{p-1} + \delta_{p-2} + \cdots + \delta_0 = p \end{aligned}$$
L'indice de nilpotence de u est donc n.

III. Cas de la dimension quelconque (facultatif)

1. Dans cette question on considère $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles ou complexes. On note une suite $u = (u_n)$ sous la forme d'une liste infinie $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$.

   (a) On considère l'application $R : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ suivante, appelée *shift à droite* :

   $$R : u = (u_n) \mapsto R(u) = (0, u_0, u_1, u_2, \dots).$$

   On vérifie sans difficulté que R est une application linéaire injective (montrez le !). On sait alors (cours sur les applications, ou on le vérifie directement) que R^k est aussi une application linéaire injective. Ainsi $N_k = Ker(R^k) = \{0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la suite (N_k) est constante.
   Regardons I_k pour $k \in \mathbb{N}$:

   $$\begin{aligned} I_k = \{R^k(u)/u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}\} &= \{(\underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ fois}}, u_0, u_1, \dots)/u_i \in \mathbb{K}\} \\ &= \{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}/u_0 = u_1 = \dots = u_{k-1} = 0\}. \end{aligned}$$

   La suite (I_k) est bien strictement décroissante pour l'inclusion.

   (b) On regarde maintenant l'application $L : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ suivante, appelée *shift à gauche* :

   $$L : u = (u_n) \mapsto R(u) = (u_1, u_2, u_3, \dots).$$

   On vérifie sans difficulté que L est une application linéaire surjective (montrez le !). Alors L^k est aussi une application linéaire surjective. Ainsi $I_k = Im(L^k) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la suite (I_k) est constante.
   Regardons N_k pour $k \in \mathbb{N}$. Soit $u = (u_0, u_1, u_2, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

   $$\begin{aligned} u \in N_k &\Leftrightarrow L^k(u) = 0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} \\ &\Leftrightarrow (u_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \dots) = 0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} \\ &\Leftrightarrow \forall s \geq k, \quad u_s = 0 \end{aligned}$$

   La suite (N_k) est bien strictement croissante pour l'inclusion.

   Remarque. On a $L \circ R = Id_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}$. On retrouve en particulier que R est injective et que L est surjective (cours sur les applications). **MAIS** R et L ne sont pas bijectives. En particulier, on a $R \circ L \neq Id_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}$ puisque :

   $$R \circ L(u) = (0, u_1, u_2, u_3, \dots).$$

   Rappelons que pour $f, g \in \mathcal{L}(E)$, l'implication ($f \circ g = Id \Rightarrow f, g$ bijectives) n'est vrai que si on est **EN DIMENSION FINIE !**

   Ces deux applications sont intéressantes à retenir...

2. (a) • Supposons que ($N_k = N_{k+1}$ et $I_{k+1} = I_{k+2}$). Montrons que $I_k = I_{k+1}$. On a déjà que $I_k \supset I_{k+1}$, reste à montrer l'autre inclusion.

   Soit $y \in I_k$, alors il existe $x_1 \in E$ tel que $y = f^k(x_1)$. De plus, on a $f(y) \in I_{k+1} = I_{k+2}$. Donc il existe $x_2 \in I_{k+2}$ tel que $f(y) = f^{k+2}(x_2)$. On a ainsi

   $$f(y) = f^{k+1}(x_1) = f^{k+2}(x_2).$$

   En particulier, on a $f^{k+1}(x_1 - f(x_2)) = 0_E$ et donc $x_1 - f(x_2) \in N_{k+1} = N_k$. On a donc $f^k(x_1 - f(x_2)) = 0_E$. Finalement, on a

   $$y = f^k(x_1) = f^{k+1}(x_2).$$

   Ainsi $y \in I_{k+1}$ et on a l'inclusion $I_k \subset I_{k+1}$.

- Supposons que ($I_k = I_{k+1}$ et $N_{k+1} = N_{k+2}$). Montrons que $N_k = N_{k+1}$. On a déjà $N_k \subset N_{k+1}$.

  Soit $y \in N_{k+1}$, alors $f^k(y) \in I_k = I_{k+1}$. Il existe donc $x \in E$ tel que $f^k(y) = f^{k+1}(x)$. Mais alors :
  $$f^{k+2}(x) = f^{k+1}(y) = 0_E.$$
  Ainsi $x \in N_{k+2} = N_{k+1}$. On en déduit donc que $f^k(y) = f^{k+1}(x) = 0_E$ et donc que y appartient à N_k. D'où l'inclusion $N_{k+1} \subset N_k$.

(b) On suppose donc l'existence de tels entiers p et q. On veut montrer que $p = q$ (on a déjà ce résultat en dimension finie).

- si $p < q$, alors ($N_{q-1} = N_q$ et $I_q = I_{q+1}$). Par la question précédente, on aurait alors $I_{q-1} = I_q$, ce qui contredirait la définition (la minimalité) de l'entier q. Donc on a $p \geq q$.
- si $p > q$, de même ($I_{p-1} = I_p$ et $N_p = N_{p+1}$), d'où $N_{p-1} = N_p$ ce qui contredit la définition de p cette fois. Ainsi on a $p \leq q$.

Finalement, on a bien $p = q$.