DM12

Devoir maison à rendre le 25/05/16

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Problème 1

Le but de ce problème est de démontrer la **formule de Stirling** :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Partie I. Convergence de deux suites

On considère les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = ln(u_n).$$

1. Déterminer un équivalent de $v_{n+1} - v_n$.
2. En déduire que la suite (v_n) converge.
3. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que :

$$n! \sim k\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Partie II. Calcul de la constante k

On souhaite prouver maintenant que $k = \sqrt{2\pi}$. On considère pour cela les intégrales de Wallis définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt.$$

1. (a) Calculer W_0 et W_1.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \geq 2, \quad W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2}.$$
   (c) Soit $p \in \mathbb{N}$. En déduire les expressions de W_{2p} et W_{2p+1} en fonction de p.
2. (a) Montrer que :
   $$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad W_{2p+1} \leq W_{2p} \leq W_{2p-1}.$$
   (b) En déduire que :
   $$\lim_{p\to+\infty} \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} = 1.$$
3. En déduire que :
$$\frac{1}{p}\left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\right)^2 \sim \pi.$$
4. Conclure que $k = \sqrt{2\pi}$.

Partie III. Applications

1. On jette $2n$ fois une pièce équilibrée. On note p_n la probabilité d'avoir n piles et n faces. Montrer que :
$$p_n \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

2. Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum u_n$ avec :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = nln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) - 1.$$

Problème 2

Partie I. Étude de deux applications

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égaux à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On définit les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \end{array}$$

et

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$$

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, en indiquant les calculs intermédiaires.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?
4. Montrer que ϕ est linéaire.
5. Déterminer une base de $Ker(\phi)$. Quelle est la dimension de $Ker(\phi)$?
6. L'application ϕ est-elle injective ? surjective ?

Partie II. Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Enfin, on note $\mathcal{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\mathcal{B}' = (1, -2X+1, 6X^2-6X+1)$$

1. Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

2. Ecrire la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
3. Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.
4. Ecrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.
5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neufs coefficients de A^n.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a,b,c.
   On rappelle que l'on note $f^0 = Id_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.
7. En déduire que :
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \lim_{n \to +\infty} \phi\left(f^n(P)\right) = \int_0^1 P(t)dt.$$

Partie III. Une autre preuve du résultat précédent

1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$$
2. En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \lim_{n \to +\infty} \phi\left(f^n(P)\right) = \int_0^1 P(t)dt$$
