DM13

Correction du devoir maison

Problème 1

1. On est dans le cas équiprobable. On peut donc calculer la probabilité en faisant le rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles. Si on note G l'évènement "Ben gagne", on a ici :
$$\mathbb{P}(G) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$
le nombre 4 étant le nombre de faces égales à 2 sur le dés B.

2. Notons C_1 (resp. C_5) l'évènement "Jerry obtient 1 (resp. 5)". La famille (C_1, C_5) est un système complet d'évènements. On en déduit ainsi que (formule des probabilités totales) :
$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(G \cap C_1) + \mathbb{P}(G \cap C_5) = \mathbb{P}_{C_1}(G)\mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}_{C_5}(G)\mathbb{P}(C_5).$$
Or on a $\mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(C_5)$, et $\mathbb{P}_{C_1}(G) = 1$, $\mathbb{P}_{C_5}(G) = \mathbb{P}(B_6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (où B_6 est l'évènement "Ben obtient 6"). En remplaçant, on obtient $\mathbb{P}(G) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

3. On note avec le même principe les évènements D_4 et D_0. On obtient alors de la même manière :
$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}_{D_0}(G)\mathbb{P}(D_0) + \mathbb{P}_{D_4}(G)\mathbb{P}(D_4) = 1 \times \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

4. On a $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(D_4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

5. Il vaut mieux être à la place de Jerry. En effet on vient de montrer que pour tout dé (A,B,C,D), il existe un autre dé (respectivement D,A,B,C) tel que la probabilité de gain est égale à $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$. Ainsi selon le choix de Ben, Jerry peut choisir un dé de telle façon d'avoir une probabilité de gagner supérieure à $\frac{1}{2}$. Il a donc plus de chance de gagner la partie.

6. Il nous faut encore pour pouvoir conclure :
   - la probabilité que Ben gagne s'il choisit le dé A et Jerry le dé C : $\mathbb{P}(G) = \frac{1}{2}$;
   - la probabilité que Ben gagne s'il choisit le dé B et Jerry le dé D : $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}_{D_4}(G)\mathbb{P}(D_4) + \mathbb{P}_{D_0}(G)\mathbb{P}(D_0) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} + 1 \times \frac{2}{6} = \frac{5}{9}$.

   Ainsi la meilleure stratégie pour Jerry est de prendre les dés D,A,B,C respectivement si Ben choisit les dés A,B,C,D, puisqu'alors il a une probabilité égale à $\frac{2}{3}$ de gagner.

   On suppose que Jerry adopte la meilleure stratégie possible. Notons G la variable aléatoire représentant le gain de Ben. On a $G = \begin{cases} \alpha \text{ si Ben gagne,} \\ -1 \text{ si Jerry gagne.} \end{cases}$

   Le gain moyen de Ben est $\mathbb{K}(G) = \alpha\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$. Pour que Ben accepte de jouer, il faut que $\mathbb{K}(G) \geq 0$ soit encore $\alpha \geq 2$. Ainsi, l'ensemble des α pour lesquels Ben accepterait de jouer est $[3/2, +\infty[$.

Problème 2

On considère un espace euclidien $(E, < \cdot, \cdot >)$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit l'application f^* de E dans E par :

$$\forall x \in E, \quad f^*(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, f(e_i) > e_i.$$

1. Pour tout $x, y \in E$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f^*(\lambda x + \mu y) &= \sum_{i=1}^{n} < \lambda x + \mu y, f(e_i) > e_i \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} < x, f(e_i) > e_i + \mu \sum_{i=1}^{n} < y, f(e_i) > e_i = \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

   Ainsi on a bien $f^* \in \mathcal{L}(E)$.

2. (a) Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} < f^*(x), y > &=< \sum_{i=1}^{n} < x, f(e_i) > e_i, y >= \sum_{i=1}^{n} < x, f(e_i) >< e_i, y > \\ &= \sum_{i=1}^{n} < x, f(e_i) >< e_i, y >=< x, \sum_{i=1}^{n} < e_i, y > f(e_i) > \\ &=< x, f\left(\sum_{i=1}^{n} < e_i, y > e_i\right) >=< x, f\left(\sum_{i=1}^{n} < e_i, y > e_i\right) > \\ &=< x, f\left(y\right) > \end{aligned}$$

   (b) Soit g une telle application. Alors on a pour tout $x, y \in E$:

$$< g(x), y >=< x, f(y) >=< f^*(x), y > .$$

   D'où $< g(x) - f^*(x), y >= 0$. Ceci étant vrai pour tout $y \in E$, on en déduit que $g(x) - f^*(x) \in E^\perp = \{0_E\}$. Ainsi on a bien $g(x) - f^*(x) = 0_E$ pour tout $x \in E$, et donc $g = f^*$.

   (c) On a pour tout $x, y \in E$:

$$< (f^*)^*(x), y >=< x, f^*(y) >=< f(x), y > .$$

   Avec la question précédente, on en déduit que $f = (f^*)^*$.
   De même, on a pour tout $x, y \in E$:

$$\begin{aligned} < (\lambda f + \mu g)^*(x), y > &=< x, (\lambda f + \mu g)(y) >= \lambda < x, f(y) > +\mu < x, g(y) > \\ &= \lambda < f^*(x), y > +\mu < g^*(x), y >=< (\lambda f^* + \mu g^*)(x), y > . \end{aligned}$$

   On obtient $(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$.
   Pour tout $x, y \in E$:

$$\begin{aligned} < (f \circ g)^*(x), y > &=< x, f \circ g(y) >=< x, f(g(y)) > \\ &=< f^*(x), g(y) >=< g^*(f^*(x)), y >=< g^* \circ f^*(x), y > \end{aligned}$$

   On obtient $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et fixons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de E. On définit alors de même que dans l'énoncé deux adjoints selon ces deux bases qu'on notera g et g'. On a pour tout $x, y \in E$:

$$< g(x), y >=< x, f(y) >=< g'(x), y > .$$

   En utilisant une question précédente, on en déduit que $g = g'$. On en déduit donc que l'adjoint ne dépend pas de la base choisie.

4. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, et notons $A = (a_{i,j})$ (resp. $B = (b_{i,j})$) la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (resp. la matrice de f^* dans la base $\mathcal{B}'$). On a pour tout $i, j \in E$:

$$a_{i,j} =< f(e_j), e_i >=< e_j, f^*(e_i) >= b_{j,i}.$$

On a donc bien ${}^tA = B$.

5. Montrons que $Ker(f^*) = Im(f)^\perp$:

- Soit $z \in Ker(f^*)$, et considérons $y \in Im(f)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a alors :
$$< z, y >=< z, f(x) >=< f^*(z), x >=< 0_E, x >= 0.$$
Donc $z \in Im(f)^\perp$
- Soit $z \in Im(f)^\perp$. On a pour tout $x \in E$:
$$< f^*(z), x >=< z, f(x) >= 0.$$
Ainsi $f^*(z)$ appartient à $E^\perp = \{0_E\}$. Donc $f^*(z) = 0_E$ et $z \in Ker(f^*)$.

Appliquons l'égalité précédente à f^* :

$$Ker((f^*)^*) = Im(f^*)^\perp \quad \Rightarrow \quad Ker(f) = Im(f^*)^\perp.$$

On prend alors l'orthogonal dans cette égalité (on est en dimension finie, donc $(F^\perp)^\perp = F$) pour obtenir le résultat voulu $Im(f^*) = Ker(f)^\perp$.

6. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur sur F parallèlement à G ($E = F \oplus G$).

$\Rightarrow$ Supposons que p soit un projecteur orthogonal, c'est à dire que $F^\perp = G$. Soient alors $x, y \in E$ qu'on décompose dans cette somme direct $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ ($x_1, y_1 \in F, x_2, y_2 \in G$). On a :

$$< p(x), y >=< x_1, y >=< x_1, y_1 > + < x_1, y_2 >=< x_1, y_1 > .$$

$$< x, p(y) >=< x, y_1 >=< x_1 + x_2, y_1 >=< x_1, y_1 > .$$

Ainsi on a montré que pour tout $x, y \in E$, on a :

$$< p^*(x), y >=< x, p(y) >=< p(x), y > .$$

En utilisant une question précédente, on en déduit alors que $p = p^*$ (on dit que p est autoadjoint).

$\Leftarrow$ Supposons à présent que $p = p^*$. Alors on a en utilisant la question précédente :

$$F = Im(p) = Im(p^*) = Ker(p)^\perp = G^\perp.$$

Donc p est bien une projection orthogonale.
