DM3

Correction du Devoir Maison

Exercice 1

Partie 1

1. Les solutions de $(E) : z^5 - 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$ sont les racines cinquièmes de l'unité, c'est à dire les $e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ avec $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

2. (a) On utilise la formule du cours $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$ ici :
$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1).$$

   (b) On résout l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Tout d'abord, $z = 0$ n'est pas solution de cette équation, donc on peut supposer $z \neq 0$ dans la suite. On divise cette équation par z^2 :
$$z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2} = 0.$$
En posant $Z = z + \dfrac{1}{z}$, on a $Z^2 = z^2 + 2 + z^{-2}$. Donc l'équation devient $Z^2 + Z - 1 = 0$. On obtient une équation du second degré en Z, qu'on sait résoudre : le discriminant vaut $\Delta = 5$, et on obtient $Z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. On obtient donc les deux équations suivantes en z :
$$(E_+) \quad z^2 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} z + 1 = 0 \text{ et } (E_-) \quad z^2 - \frac{-1-\sqrt{5}}{2} z + 1 = 0.$$
Le discriminant de ces équations vaut $\Delta_\pm = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} < 0$, et les solutions de $(E_\pm)$ sont donc $z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{\pm 2\sqrt{5} + 10}}{4}$ et $z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} - i\dfrac{\sqrt{\pm 2\sqrt{5} + 10}}{4}$.
Finalement, l'ensemble des solutions de $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ est :
$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}, \\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{-2\sqrt{5}+10}}{4}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\dfrac{\sqrt{-2\sqrt{5}+10}}{4} \end{array} \right\}$$

3. (a) On a obtenu l'ensemble des solutions de $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ de deux manières différentes, sous des formes différentes. Reste à présent à identifier la solution $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $e^{\frac{4i\pi}{5}}$ parmi celles-ci.
Puisque $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, les parties réelle et imaginaire de $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ sont donc strictement positives. Il s'agit donc de la solution $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient donc :
$$\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin(2\pi/5) = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}.$$
De même $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$, la partie réelle de $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est strictement négative, sa partie imaginaire est strictement positive. Il s'agit donc de la solution $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{-2\sqrt{5}+10}}{4}$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient donc :
$$\cos(4\pi/5) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin(4\pi/5) = \frac{\sqrt{-2\sqrt{5}+10}}{4}.$$

   (b) On se rappelle que $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$, d'où $\cos^2(\pi/5) = \dfrac{1+\cos(2\pi/5)}{2} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$ et donc $\cos(\pi/5) = \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.

Partie 2 - Construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas

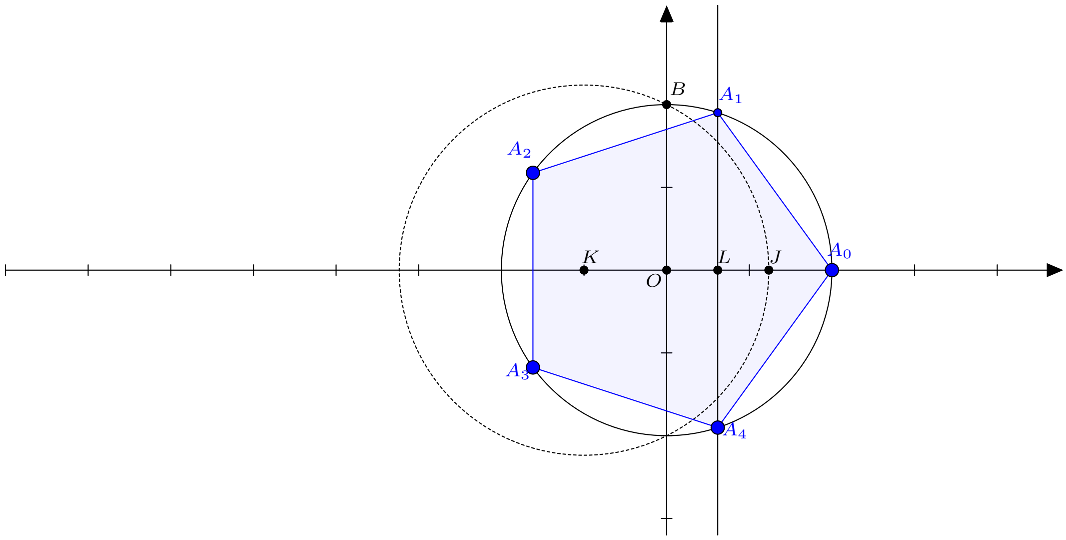
4. (a) Le polygone $A_0A_1A_2A_3A_4$ est un pentagone régulier.

   (b) Voir plus loin.

   (c) Le triangle KOB est rectangle en O, d'où par Pythagore :

$$BK^2 = KO^2 + OB^2 = (1/2)^2 + 1^2 = \frac{5}{4}.$$

   Donc $BK = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Puisque B et J sont sur le même cercle de centre K, on a $KJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
   Les points K, O et L sont alignés. Donc $OJ = KJ - KO = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
   Enfin L est le milieu de OJ, donc $OL = \frac{OJ}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \cos(2\pi/5)$.
   On en déduit que les points L et A_1 ont même abscisse. Le point L est donc la projection orthogonale de A_1 sur l'axe des abscisses.



   (d)

Exercice 2

1. La décomposition en éléments simples est de la forme : $\dfrac{x-1}{x(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x+2}$. En mettant tout au même dénominateur et en identifiant, on obtient $a = -1/2$, $b = 2$ et $c = -3/2$. On en déduit

$$\begin{aligned}\int_1^{10} \frac{x-1}{x(x+1)(x+2)}dx &= -\frac{1}{2}\int_1^{10} \frac{1}{x}dx + 2\int_1^{10} \frac{1}{x+1}dx - \frac{3}{2}\int_1^{10} \frac{1}{x+2}dx \\ &= -\frac{1}{2}\ln(10) + 2(\ln(11) - \ln(2)) - \frac{3}{2}(\ln(12) - \ln(3)).\end{aligned}$$

2. La décomposition en éléments simples est de la forme : $\dfrac{x-1}{x(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$. En mettant tout au même dénominateur et en identifiant, on obtient $a = -1$, $b = 1$ et $c = 1$.
   On en déduit

$$\begin{aligned}\int_1^y \frac{x-1}{x^3+x}dx = -\int_1^y \frac{1}{x}dx + \int_1^y \frac{x+1}{x^2+1}dx &= -\ln(|y|) + \frac{1}{2}\int_1^y \frac{2x}{x^2+1}dx + \int_1^y \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= -\ln(|y|) + \frac{1}{2}(\ln(y^2+1) - \ln(2) + \arctan(y) - \arctan(1),\end{aligned}$$

   sur un intervalle ne contenant pas 0.

3.
   - $\cos^4(x) = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \dfrac{e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16} = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$.
   - $\displaystyle\int_0^\pi \cos^4(x)dx = \int_0^\pi \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}dx = \left[\frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x\right]_0^\pi = \frac{3}{8}\pi.$

- $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos^4(x)dx = \frac{1}{8}\int_0^{\pi} x^2\cos(4x)dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2\cos(2x)dx + \frac{3}{8}\int_0^{\pi} x^2 dx.$
  On procède alors à des intégrations par parties ($x\mapsto x^2$, $x\mapsto \sin(4x)$ et $x\mapsto\sin(2x)$ étant $\mathcal{C}^3$).

$$
\begin{array}{c|ccc}
+ & x^2 & & \cos(4x) \\
 & & \searrow & \\
- & 2x & & \sin(4x)/4 \\
 & & \searrow & \\
+ & 2 & & -\cos(4x)/16 \\
 & & \searrow & \\
- & 0 & \overset{\int}{\longleftarrow} & -\sin(4x)/64
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
+ & x^2 & & \cos(2x) \\
 & & \searrow & \\
- & 2x & & \sin(2x)/2 \\
 & & \searrow & \\
+ & 2 & & -\cos(2x)/4 \\
 & & \searrow & \\
- & 0 & \overset{\int}{\longleftarrow} & -\sin(2x)/8
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x^2\cos^4(x)dx &= \frac{1}{8}[x^2\sin(4x)/4 + x\cos(4x)/8 - \sin(4x)/32]_0^{\pi} \\
&\quad + \frac{1}{2}[x^2\sin(2x)/2 + \cos(2x)/2 - \sin(2x)/4]_0^{\pi} + \frac{3}{8}[x^3/3]_0^{\pi} = \frac{\pi}{64} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^3}{6}.
\end{aligned}
$$

Exercice 3

1. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et normalisée. On résout cette équation sur l'intervalle $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée est $y' - 2ty = 0$. Une primitive de $t\mapsto -2t$ est donnée par $t\mapsto -t^2$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme
$$t\mapsto \lambda e^{t^2} \text{ avec } \lambda\in\mathbb{R}.$$
On cherche à présent une solution particulière. On remarque que la fonction $t\mapsto \mathrm{ch}(t)$ est solution de l'équation différentielle. On peut donc conclure que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est
$$\mathcal{S} = \left\{t\mapsto \lambda e^{t^2} + \mathrm{ch}(t)/\lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

2. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants et normalisée. On résout cette équation sur l'intervalle $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée est $y' - y = 0$. Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme
$$t\mapsto \lambda e^{t} \text{ avec } \lambda\in\mathbb{R}.$$
On cherche à présent une solution particulière. L'équation est à coefficients constants, et le second membre est de la forme exponentielle - polynôme. De plus le facteur 1 dans l'exponentielle satisfait $1-1=0$ (noter que cette condition est exactement la même que pour les équations différentielles d'ordre deux : 1 est racine de l'équation caractéristique associée qui est dans ce cas $r-1=0$). On cherche donc une solution sous la forme $f(t) = (at+b)te^t$ avec $a,b\in\mathbb{R}$ à déterminer. On a $f'(t) = (at^2+bt+2at+b)e^t$. La fonction f est donc soution de l'équation si et seulement si :
$$(at^2+(b+2a)t+b)e^t - (at^2+bt)e^t = (t+1)e^t \text{ soit } 2at+b = (t+1)e^t.$$
On obtient en identifiant $b=1, a=1/2$. Ainsi une solution particulière de l'équation est donnée par $t\mapsto (t/2+1)te^t$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est
$$\mathcal{S} = \left\{t\mapsto \lambda e^t + (t/2+1)te^t/\lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

3. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et non normalisée. On résout cette équation sur $]0,+\infty[$ ou sur $]-\infty,0[$. L'équation normalisée devient alors :
$$y' - \frac{1}{t}y = te^t.$$
L'équation homogène associée est $y' - \frac{1}{t}y = 0$. Une primitive de $t\mapsto -\frac{1}{t}$ est donnée par $t\mapsto -\ln(|t|)$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme
$$t\mapsto \lambda e^{\ln(|t|)} = \lambda|t| \text{ avec } \lambda\in\mathbb{R}$$
soit encore $t\mapsto\lambda t$ (quitte à changer λ en $-\lambda$).

   On cherche à présent une solution particulière. Le second membre est encore de la forme exponentielle - polynôme, mais la méthode précédente ne s'applique pas car **les coefficients de l'équation ne sont**

pas constants. On applique la méthode de variation de la constante : on cherche une solution sous la forme $f(t) = \lambda(t)t$ avec λ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ ou sur $]-\infty, 0[$. On a $f'(t) = \lambda'(t)t + \lambda(t)$. La fonction f est alors solution de l'équation si et seulement si :

$$\lambda'(t)t + \lambda(t) - \frac{1}{t}\lambda(t)t = te^t$$

soit encore $\lambda'(t) = e^t$. On peut donc prendre $\lambda(t) = e^t$, et $t \mapsto te^t$ est solution particulière de l'équation différentielle.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$ ou sur $]-\infty, 0[$ est donc

$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto \lambda t + te^t / \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

4. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et non normalisée. Le coefficient de y' ne s'annulant pas, on résout cette équation sur $\mathbb{R}$. L'équation normalisée devient alors :

$$y' + \frac{1}{t^2+1}y = \frac{\arctan(t)}{t^2+1}.$$

L'équation homogène associée est $y' + \frac{1}{t^2+1}y = 0$. Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$ est donnée par $t \mapsto \arctan(t)$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{-\arctan(t)} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche à présent une solution particulière par la méthode de variation de la constante, sous la forme $f(t) = \lambda(t)e^{-\arctan(t)}$ avec λ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a $f'(t) = \lambda'(t)e^{-\arctan(t)} - \frac{\lambda(t)}{t^2+1}e^{-\arctan(t)}$. La fonction f est alors solution de l'équation si et seulement si :

$$\lambda'(t)e^{-\arctan(t)} - \frac{\lambda(t)}{t^2+1}e^{-\arctan(t)} + \frac{1}{t^2+1}\lambda(t)e^{-\arctan(t)} = \frac{\arctan(t)}{t^2+1},$$

soit encore $\lambda'(t) = \dfrac{\arctan(t)}{t^2+1}e^{\arctan(t)}$. On cherche alors une primitive de $t \mapsto \dfrac{\arctan(t)}{t^2+1}e^{\arctan(t)}$. On fait une intégration par parties :

$$\begin{array}{c|ccc} + & \arctan(t) & & \frac{1}{t^2+1}e^{\arctan(t)} \\ & & \searrow & \\ - & \frac{1}{t^2+1} & \xleftarrow{\int} & e^{\arctan(t)} \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto \arctan(t)$ et $t \mapsto e^{\arctan(t)}$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$. On a donc :

$$\int \frac{\arctan(t)}{t^2+1}e^{\arctan(t)}dt = [\arctan(t)e^{\arctan(t)}] - \int \frac{1}{t^2+1}e^{\arctan(t)}dt = \arctan(t)e^{\arctan(t)} - e^{\arctan(t)} + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$. On peut donc prendre $\lambda(t) = \arctan(t)e^{\arctan(t)} - e^{\arctan(t)}$, et $t \mapsto (\arctan(t)e^{\arctan(t)} - e^{\arctan(t)})e^{-\arctan(t)} = \arctan(t) - 1$ est solution particulière de l'équation.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc

$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto \lambda e^{-\arctan(t)} + \arctan(t) - 1 / \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$
