DM4

Devoir maison à rendre le 16/11/15

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Soit J un intervalle contenu dans $]-\infty,0[\cup]0,1[$. On considère l'équation différentielle :

$$(E_J) \quad (1-x)xy' + (1-x)y = 1.$$

1. Résoudre sur l'intervalle J l'équation homogène associée.
2. En déduire les solutions sur l'intervalle J de l'équation (E_J).
3. Soit (F_J) l'équation différentielle :

$$(F_J) \quad (1-x)xy'' + (1-x)y' = 1.$$

   Déterminer que les solutions sur J de (F_J) sont les fonctions g de la forme $g(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt + A\ln|x| + B$, où A et B sont des constantes.
4. Existe t-il une solution de (E_J) sur $]-\infty,1[$?

Exercice 2

On cherche à résoudre sur $I =]-1,1[$ l'équation :

$$(x^2-1)y'' + 3xy' - 8y = 2x. \qquad (E)$$

1. Soit y une fonction deux fois dérivable sur I.

   On pose $J =]0,\pi[$ et :

$$z : \begin{array}{l} J \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \sin(t)\cdot y(\cos(t)). \end{array}$$

   (a) Montrer que z est deux fois dérivable sur J et calculer z' et z''.

   (b) Montrer que :

$$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \Leftrightarrow z \text{ solution de } (E') \text{ sur } J,$$

   où

$$z'' + 9z = -2\cos(t)\sin(t). \qquad (E')$$

2. Résoudre (E') sur J.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur I. On écrira les solutions sous forme simplifiée.
