DM5

Correction du devoir maison

Exercice 1

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(x) = \dfrac{1+ix}{1-ix}$.

1. L'expression est définie en tout point x tel que $1 - ix \neq 0$, c'est à dire $x \neq -i$, ce qui est vraie pour tout x réel.

2.
   - Montrons que l'application f est injective :
     Soient x et x' deux réels tels que $f(x) = f(x')$. On a alors : $\dfrac{1+ix}{1-ix} = \dfrac{1+ix'}{1-ix'}$ donc $(1+ix)(1-ix') = (1+ix')(1-ix)$ d'où $1 - ix' + ix + xx' = 1 - ix + ix' + xx'$. On obtient ainsi, $2ix = 2ix'$ d'où $x = x'$.
     Ainsi, f est injective.
   - Montrons que l'application f n'est pas surjective :
     $-1 \in \mathbb{C}$ mais -1 n'a pas d'antécédent par f. En effet, supposons que -1 a un antécédent $x \in \mathbb{R}$ par f, alors x vérifie $\dfrac{1+ix}{1-ix} = -1$ soit $1 + ix = -1 + ix$ d'où $2 = 0$ Absurde.
     Donc f n'est pas surjective.

3.
   - Par définition, $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R}\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
     $$f(x) = \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{(1+ix)(1+ix)}{1+x^2} = \frac{1-x^2+2ix}{1+x^2}$$
     Ainsi, $f(x) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $2x = 0$ si et seulement si $x = 0$. Ainsi, $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{0\}$.
   - Par définition, $f(\mathbb{R}) = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$.
     Montrons tout d'abord que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{U} \setminus \{-1\}$:
     Soit $y \in f(\mathbb{R})$. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, $y = \dfrac{1+ix}{1-ix}$. Donc $|y| = \left|\dfrac{1+ix}{1-ix}\right| = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1$. Donc $y \in \mathbb{U}$. De plus, si $\dfrac{1+ix}{1-ix} = -1$ alors $1 + ix = -(1 - ix)$ donc $2 = 0$ absurde. Ainsi, $\dfrac{1+ix}{1-ix} \neq -1$ et $y \neq -1$. Finalement, on a bien montré que $y \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.
     Montrons réciproquement que $\mathbb{U} \setminus \{-1\} \subset f(\mathbb{R})$:
     Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
     $$\begin{aligned} f(x) = z \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1+ix}{1-ix} = z \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 + ix = z(1 - ix) \\ &\Longleftrightarrow \quad ix(1+z) = z - 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = -i\frac{z-1}{z+1} \qquad (\text{car } z \neq -1) \end{aligned}$$
     Posons donc $x_0 = -i\dfrac{z-1}{z+1}$ et montrons que x_0 est réel : $\overline{x_0} = \overline{-i\dfrac{z-1}{z+1}} = i\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}$
     Or, $|z| = 1$ donc $z\overline{z} = |z|^2 = 1$ donc $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$. Ainsi,
     $$\overline{x_0} = i\frac{\frac{1}{z}-1}{\frac{1}{z}+1} = i\frac{1-z}{1+z} = -i\frac{z-1}{z+1} = x_0$$

Donc x_0 est réel.
Finalement, on a : $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f(x_0) = z$ donc $z \in f(\mathbb{R})$ donc $\mathbb{U} \setminus \{-1\} \subset f(\mathbb{R})$.
On a donc établi que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

Exercice 2

Soient A, E et F trois ensembles non vides. On se donne $u : E \to F$ une application et on pose $\phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{F}(A,E) & \to & \mathcal{F}(A,F) \\ f & \mapsto & u \circ f \end{array}$.

1. Pour tout $f \in \mathcal{F}(A,E)$, $u \circ f$ est bien définie et est une application de A dans F, c'est donc un élément de $\mathcal{F}(A,F)$ et ϕ est bien définie.

2.
   - Supposons u injective. Soit $(f,g) \in \mathcal{F}(A,E)^2$ tel que $\phi(f) = \phi(g)$. Alors $u \circ f = u \circ g$. f et g ont même ensemble de départ (A) et même ensemble d'arrivée (E). De plus, pour tout $x \in A$, on a $(u \circ f)(x) = (u \circ g)(x)$, donc $u(f(x)) = u(g(x))$. Comme u est injective, ceci donne $f(x) = g(x)$.
   Ainsi $f = g$ et ϕ est injective.
   - Supposons ϕ injective. Soit $(x,y) \in E^2$ tel que $u(x) = u(y)$. Posons $f : A \to E$ la fonction constante égale à x et $g : A \to E$ la fonction constante égale ày. Alors $u \circ f$ et $u \circ g$ ont même ensemble de départ (A) et d'arrivée (F), et pour tout $a \in A$, $(u \circ f)(a) = u(f(a)) = u(x) = u(y) = u(g(a)) = (u \circ g)(a)$. Ainsi $u \circ f = u \circ g$ i.e. $\phi(f) = \phi(g)$. Comme ϕ est injective, on en déduit que $f = g$. A étant non vide, il existe $a \in A$ et alors $x = f(a) = g(a) = y$. On a donc u injective.

   En conclusion, ϕ est injective si et seulement si u est injective.

3.
   - Supposons u surjective. Soit $h \in \mathcal{F}(A,F)$. Pour tout $a \in A$, $h(a) \in F$, donc admet un antécédent par u dans E (par surjectivité de u) que l'on note x_a. Posons $g : \begin{array}{rcl} A & \to & E \\ a & \mapsto & x_a \end{array}$.
   Pour $a \in E$, on a donc $u(g(a)) = h(a)$ i.e. $(u \circ g)(a) = h(a)$. Or $(u \circ g)$ et h ont même ensemble de départ (A), d'arrivée (E), donc $u \circ g = h$ i.e. $\phi(g) = h$. Ainsi ϕ est surjective.
   - Supposons ϕ surjective. Soit $y \in F$ et soit $h : A \to F$ la fonction constante y. Comme ϕ est surjective, il existe $g \in \mathcal{F}(A,E)$ tel que $\phi(g) = h$ c'est-à-dire $u \circ g = h$. Comme A est non vide, il existe $a \in A$ et $(u \circ g)(a) = h(a) = y$ i.e. $u(g(a)) = y$. En posant $x = g(a) \in E$, on a donc $u(x) = y$ et u est surjective.

   En conclusion, ϕ est surjective si et seulement si u est surjective.

4. D'après les deux questions précédentes, ϕ est bijective si et seulement si u est bijective. On a alors :
$$\forall f \in \mathcal{F}(A,E),\ \forall h \in \mathcal{F}(A,F),\ u \circ f = h \iff f = u^{-1} \circ h$$
   Ainsi,
$$\phi^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathcal{F}(A,F) & \to & \mathcal{F}(A,E) \\ h & \mapsto & u^{-1} \circ h \end{array}.$$
