DM6

Devoir maison à rendre le 08/01/16

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

On considère la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$ et $u_0 > 0$. On désigne par f la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et que pour tout n, $u_n > 0$.
2. Quelles sont les limites finies possibles de la suite (u_n) ?

   On pose $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.
3. On suppose que $u_0 \in [0, \alpha]$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{2n} \in [0, \alpha] \text{ et } u_{2n+1} \in [\alpha, 1].$$
   Étudier les variations de (u_{2n}) (on étudiera le signe de $f \circ f(x) - x$). En déduire que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, puis que (u_n) est convergente.
4. Étudier le cas où $u_0 > \alpha$.

Exercice 2

Soient n et p deux entiers non nuls. Le but de cet exercice est de calculer le nombre d'applications de $[|1, n|]$ dans $[|1, p|]$ surjectives. On note $S_{n,p}$ ce nombre.

1. Calculer $S_{n,n}$, $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$.
2. Calculer $S_{n,p}$ quand $p > n$.
3. Montrer que :
$$\sum_{q=k}^{p} (-1)^q \binom{p}{q}\binom{q}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [|0, p-1|] \\ (-1)^p & \text{si } k = p \end{cases}$$
   On pourra utiliser le changement de variable: $j = q - k$.
4. Pour tout $q \in [|0, p|]$, on pose $\mathcal{S}_q = \Big\{ f \in \mathcal{F}([|1, n|], [|1, p|]) \mid Card\Big(f\,([|1, n|])\Big) = q \Big\}$.
   (a) Montrer que pour tout $(q, q') \in [|0, p|]^2$ tel que $q \neq q'$, $\mathcal{S}_q \cap \mathcal{S}_{q'} = \emptyset$.
   Montrer que $\mathcal{F}([|1, n|], [|1, p|]) = \bigcup\limits_{q=0}^{p} \mathcal{S}_q$.
   On dit alors que les $\mathcal{S}_q$ forment une partition de $\mathcal{F}([|1, n|], [|1, p|])$.
   (b) En déduire que $p^n = \sum\limits_{q=0}^{p} \binom{p}{q} S_{n,q}$.
5. En déduire la formule $S_{n,p} = (-1)^p \sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n$.
   On pourra appliquer la formule de la question précédente à $p = k$ et partir du membre de droite.
6. En déduire que pour tout $p \geq 2$, $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.

7. En s'inspirant du triangle de Pascal, expliquer comment on peut construire une table des $S_{n,p}$.

8. Calculer les $S_{n,p}$ pour $1 \leq p \leq 6$ et $1 \leq n \leq 6$.

9. **Question facultative (Bonus) :**
   Dans cette question, on souhaite calculer directement $S_{p+1,p}$ (sans utiliser le début de l'exercice).

   (a) Soit $f : [|1, p+1|] \to [|1, p|]$ une application surjective.
   Montrer qu'il existe $a \in [|1, p+1|]$ tel que $f : [|1, p+1|] \backslash \{a\} \to [|1, p|]$ soit bijective.

   (b) En déduire le cardinal cherché.
