DM7

Correction du devoir maison

Exercice 1

1. La matrice P est une matrice 2×2. On peut donc appliqué le critère du cours : on a $ad-bc = 1\times 2 - 1\times 1 = 1 \neq 0$. La matrice P est donc inversible, et son inverse est :
$$P^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Il suffit de faire le produit...

3. Pour $n=0$, on a $A^0 = I_n$ et $PD^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n$.
Soit à présent $n \geq 1$, on a :
$$\begin{aligned} A^n &= \underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{\text{n fois}} \\ &= (PDP^{-1})\times(PDP^{-1})\times\cdots\times(PDP^{-1})\times(PDP^{-1}) \\ &= P\times D\times(P^{-1}P)\times D\times\cdots\times D\times(P^{-1}P)\times D\times P^{-1} \\ &= P\times\underbrace{D\times D\times\cdots\times D}_{\text{n fois}}\times P^{-1} \\ &= PD^nP^{-1}. \end{aligned}$$
Notons de plus que $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

4. (a) On a : $AX_n = \begin{pmatrix} -u_n+2v_n \\ -4u_n+5v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$.
   (b) On a donc en itérant le résultat précédent
$$X_n = AX_{n-1} = A^2X_{n-2} = \cdots = A^nX_0 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$
De plus, on a : $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3^n & -1+3^n \\ 2-2\times 3^n & -1+2\times 3^n \end{pmatrix}$.
On en déduit, pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3^n & -1+3^n \\ 2-2\times 3^n & -1+2\times 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-3^n)u_0 + (-1+3^n)v_0 \\ (2-2\times 3^n)u_0 + (-1+2\times 3^n)v_0 \end{pmatrix}.$$
Ainsi, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$u_n = (2u_0 - v_0) + 3^n(v_0-u_0) \quad \text{et} \quad v_n = (2u_0-v_0) + 3^n(2v_0-2u_0).$$
   (c) On a trois cas possibles :
      - si $u_0 = v_0$, les suites (u_n) et (v_n) sont constantes égales à $2u_0 - v_0$;
      - si $u_0 < v_0$, les suites (u_n) et (v_n) divergent vers $+\infty$;
      - si $u_0 > v_0$, les suites (u_n) et (v_n) divergent vers $-\infty$;

5. (a) On a d'après l'énoncé :
$$X' = AX = APX_1.$$
De plus on a $X = PX_1$, soit $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& x_1+y_1 \\ y &=& x_1+2y_1 \end{array}\right.$. En dérivant ces deux équations, on obtient :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& x_1'+y_1' \\ y' &=& x_1'+2y_1' \end{array}\right.$$

Ainsi on a $X' = PX_1'$. On obtient en remplaçant dans l'égalité précédente :

$$PX_1' = APX_1 \quad \Leftrightarrow \quad X_1' = P^{-1}APX_1 = DX_1$$

car $A = PDP^{-1}$.

(b) On a alors en écrivant ce produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi x_1 et y_1 satisfont les deux équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants suivantes :

$$x_1' = x_1 \quad \text{et} \quad y_1' = 3y_1.$$

(c) On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x_1(t) = \lambda e^t$ et $y_1(t) = \mu e^{3t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
On obtient alors x et y avec la relation $X = P \cdot X_1$: pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda e^t \\ \mu e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^t + \mu e^{3t} \\ \lambda e^t + 2\mu e^{3t} \end{pmatrix}$$

Les solutions x et y du système de départ sont donc :

$$x(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t} \quad \text{et} \quad y(t) = \lambda e^t + 2\mu e^{3t} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

Soit $n \geq 3$, on pose $g_n : x \mapsto x^n + x^2 + 2x - 1$.

1. La fonction g_n est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur cet intervalle, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_n'(x) = nx^{n-1} + 2x + 2$$

On a $g_n'(x) \geq 0$ quand $x \geq 0$. La fonction g_n est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus $g(0) = -1$ et $\lim_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$. g_n réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[-1, +\infty[$. Puisque $0 \in [-1, +\infty[$, l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, notée x_n.

2. On a $g_n(1/2) = (1/2)^n + 1/4 > 0 = g_n(x_n)$. Puisque g_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $x_n \leq 1/2$.

3. On a $x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} - 1 = 0$, soit $x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} - 1 = -x_{n+1}^{n+1}$. On calcule $g_n(x_{n+1})$:

$$\begin{aligned} g_n(x_{n+1}) &= x_{n+1}^n + x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} - 1 \\ &= x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n+1} = x_{n+1}^n(1 - x_{n+1}) \geq 0 \quad \text{car} \quad x_{n+1} \leq 1/2. \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant que g_n est strictement croissante et que $g_n(x_n) = 0$, on en déduit que $x_{n+1} \geq x_n$ et ce pour tout $n \geq 3$. Donc la suite $(x_n)_{n \geq 3}$ est croissante.

4. La suite $(x_n)_{n \geq 3}$ est croissante et majorée par $1/2$. Elle converge donc vers une limite ℓ telle que $0 \leq \ell \leq 1/2$.

On a pour tout $n \geq 3$, $0 \leq x_n \leq 1/2$, donc $0 \leq x_n^n \leq (1/2)^n$. Puisque $(1/2)^n \to 0$, on en déduit par théorème d'encadrement que $\lim x_n^n$ existe et vaut 0. On peut passer à la limite dans l'égalité $x_n^n + x_n^2 + 2x_n - 1 = 0$ (tous les termes convergent !), on obtient :

$$\ell^2 + 2\ell - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ell = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Puisqu'enfin $\ell \geq 0$, on en déduit $\ell = -1 + \sqrt{2}$.
