DM7

# Devoir maison à rendre le 18/01/16

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

## Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ , $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ , $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P$ est inversible et déterminer $P^{-1}$.
2. Vérifier que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.
3. Montrer que $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} & = & -4u_n + 5v_n \end{array} \right.$$
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ et $v_n$ en fonction de $u_0$ et $v_0$ et de $n$.
   (c) Etudier le comportement de ces deux suites.
5. On considère deux fonction $x$ et $y$ définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables sur $\mathbb{R}$.
On suppose que $x$ et $y$ vérifient le système différentiel suivant :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -x + 2y \\ y' & = & -4x + 5y \end{array} \right.$$
On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, c'est à dire : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$
On définit deux fonctions $x_1, y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $X_1 = P^{-1} \cdot X$. On pose $X_1' = \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que $X_1' = D \cdot X_1$.
   (b) En déduire deux équations différentielles vérifiées par $x_1$ et $y_1$.
   (c) Déterminer les fonctions $x_1$ et $y_1$, et en déduire les solutions $x$ et $y$ du système de départ.

---

## Exercice 2

Soit $n \geq 3$, on pose $g_n : x \mapsto x^n + x^2 + 2x - 1$.

1. On considère l'équation $(E_n) : g_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, où $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. Montrer que pour tout $n \geq 3$, $(E_n)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$, que l'on note $x_n$.
2. Montrer que $(x_n)_{n \geq 3}$ est majorée par $\frac{1}{2}$.
3. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 3}$.
*On pourra pour ce faire étudier le signe de $g_n(x_{n+1})$.*
4. Étudier la convergence de $(x_n)_{n \geq 3}$. Si $(x_n)_{n \geq 3}$ converge, on précisera la valeur de sa limite.

---