DM8

Devoir maison à rendre le 08/02/16

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (Méthode de Newton)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$.
On suppose en outre que :

- $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$;
- f' est strictement négative sur $[a, b]$.

Partie I. Principe de la méthode de Newton.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$, que l'on notera α.

Le but de ce problème est de présenter une méthode pour obtenir une valeur approchée de α. Cette méthode consiste, à partir d'une première approximation x_0 de α, à linéariser l'équation $f(x) = 0$ au voisinage de x_0, donc à remplacer f par sa tangente en x_0.

2. Soit $x_0 \in [a, b]$. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $(x_0, f(x_0))$.

On introduit alors la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a, b],\ g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On obtient ainsi une nouvelle approximation de α en prenant $x_1 = g(x_0)$. En poursuivant, on est ainsi conduit à étudier l'existence, puis la convergence vers α, de la suite (x_n) définie par la relation $x_{n+1} = g(x_n)$.

3. **Exemple.** Dans cette question, on cherche une approximation de $\sqrt{3}$. Pour cela, on considère la fonction $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3 - x^2$.
   (a) Tracer la courbe représentative de f.
   (b) Prenons $x_0 = 2$ $(\approx \sqrt{3})$. Construire graphiquement les trois premiers termes de la suite (x_n).

Partie II. Étude de la fonction g.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $[a, b]$, et calculer sa dérivée. Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.
2. On souhaite prouver qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $|g(x) - \alpha| \leq K|x - \alpha|^2$.
   (a) Justifier l'existence d'un couple (m, M) de réels **strictement** positifs tels que
   $$\forall x \in [a, b],\ |f'(x)| \geq m \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq M$$
   (b) Montrer qu'il existe $L > 0$ tel que $\forall t \in [a, b],\ |f(t)| \leq L|t - \alpha|$
   (c) Soit $x \in [a, b]$. En utilisant le théorème des accroissements finis sur $[x, \alpha]$ (ou $[\alpha, x]$), justifier que
   $$|g(x) - \alpha| \leq \frac{M}{m^2} L|x - \alpha|^2.$$
   (d) Conclure.

Partie III. Étude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit (x_n) la suite récurrente définie par : $\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ \forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$

1. Dans cette question uniquement, on suppose de plus que $f'' > 0$ sur $[a,b]$ et $x_0 = a$.
   (a) Étudier les variations de g.
   (b) Justifier que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, croissante et majorée par α.
   (c) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
2. On revient au cas général.
   (a) Justifier qu'il existe $h > 0$ tel que en notant $I = [\alpha - h, \alpha + h]$, on ait $Kh < 1$ et $I \subset [a,b]$.
   (b) Établir que : $\forall x \in I,\ g(x) \in I$. En déduire que si $x_0 \in I$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien définie et $x_n \in I$.

   On suppose dans toute la suite du problème que $x_0 \in I$.

   (c) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - \alpha| \le \frac{1}{K}\Big(K(x_0-\alpha)\Big)^{2^n} \qquad (*)$$
   (d) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α[1].
3. **Exemple.** Reprenons l'approximation de $\sqrt{3}$. On considère toujours la fonction $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3 - x^2$.
   (a) Montrer que l'on peut prendre $K = 3$ et $h = 0,3$ (on pourra remarquer que $1,7 < \sqrt{3} < 2$).
   (b) En déduire que la suite (x_n) définie par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \ge 0$, on a $|x_n - \sqrt{3}| \le \frac{1}{3}\Big(0,9\Big)^{2^n}$.
   (d) Combien d'itérations doit-on faire pour obtenir 100 décimales de $\sqrt{3}$ avec cette méthode ?
   (e) Combien d'itérations doit-on faire pour obtenir 100 décimales de $\sqrt{3}$ par méthode de dichotomie ? Quelle est la méthode la plus efficace ?

Exercice 2

Le but de l'exercice est de trouver toutes les applications $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ telles que :

$$(*) \qquad \begin{cases} \forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ f(xf(y)) = yf(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \end{cases}$$

1. Trouver un exemple simple d'application qui remplit les conditions ci-dessus.
2. Soit f une application qui vérifie les conditions $(*)$.
   (a) Soit $x \in]0,+\infty[$, montrer qu'il existe $x_1 \in]0,+\infty[$ tel que $f(x_1) = x_1$. *(On exprimera x_1 en fonction de x).*
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_1^{2^n}) = x_1^{2^n}$.
   En déduire que si $x_1 > 1$, il y a une contradiction avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   (b) Si $x_1 < 1$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{1}{x_1^{2^n}}\right) = \dfrac{f(1)}{x_1^{2^n}}$. Obtenir également une contradiction.
   (c) Conclure.

[1]Avec la relation $(*)$, on dit que (x_n) converge vers α à l'ordre 2.