DM9

Correction du devoir maison

Exercice 1

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant la relation :

$$P(X^2-1) = P(X-1)P(X+1) \qquad (*)$$

1. Supposons que a est racine de P. Alors en prenant $X = a+1$ dans l'égalité $(*)$, on a :

$$P((a+1)^2-1) = P(a)P(a+2) = 0.$$

Ainsi $(a+1)^2-1$ est aussi racine de P. De même en prenant $X = a-1$, on obtient :

$$P((a-1)^2-1) = P(a-2)P(a) = 0,$$

et $(a-1)^2-1$ est aussi racine de P.

2. Soit $a_0 \in \mathbb{C}$. On définit la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\geq 0}$ en posant pour tout $n \geq 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n = (a_n+1)^2 - 1$.

(a) On suppose que a_0 soit racine de P. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est racine de P.
La propriété est vraie pour $n = 0$ par hypothèse.
Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que a_n est racine de P. En utilisant la question précédente, on en déduit directement que $a_{n+1} = (a_n+1)^2 - 1$ est racine de P. D'où la propriété au rang $n+1$.
On conclut par principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est racine de P.

(b) Posons $f(x) = x^2 + x = x(x+1)$, fonction polynomiale du second degré. L'intervalle $I =]0, +\infty[$ est stable par f. Ainsi si $a_0 \in I$, alors $a_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus f est croissante sur I, donc la suite (a_n) est monotone. Enfin, on a $f(x) - x = x^2 + x > 0$ sur I, donc la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite strictement croissante de réels strictement positifs.

(c) Par l'absurde, supposons que P admette une racine réelle strictement positive a_0. D'après les questions précédentes, a_n est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, on a montré que (a_n) est une suite strictement croissante de réels strictement positifs. Donc P aurait une infinité de racines. P serait donc le polynôme nul, ce qui contredit l'hypothèse de départ.
Ainsi, P n'admet pas de racine réelle strictement positive.

(d) Supposons que -1 soit racine de P, alors en prenant $X = -2$ dans $(*)$, on obtient :

$$P(3) = P(-3)P(-1) = 0.$$

Ainsi 3 serait racine de P, ce qui est absurde d'après la question précédente. Finalement, -1 n'est pas racine de P.

(e) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n + 1 = (a_0+1)^{2^n}$.
La propriété est vérifiée pour $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. Au rang $n+1$, on a :

$$a_{n+1} + 1 = (a_n+1)^2 = ((a_0+1)^{2^n})^2 \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

D'où $a_{n+1} + 1 = (a_0+1)^{2^{n+1}}$, et la propriété au rang $n+1$.
On conclut par principe de récurrence.

3. Soit a une racine complexe de P. Montrons que $|a+1|=1$.

   Par l'absurde si $|a+1|>1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ a_n est racine de P et $|a_n+1| = |a+1|^{2^n}$. Ainsi $\lim |a_n+1| \to +\infty$, et P aurait une infinité de racines. P serait donc le polynôme nul, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de départ.

   Si $|a+1|<1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ a_n est racine de P et $|a_n+1| = |a+1|^{2^n}$. Ainsi $\lim |a_n+1| \to 0$, et $a_n \to -1$. Mais alors en passant à la limite dans $P(a_n)=0$ (P fonction polynomiale), on obtient $P(-1)=0$. C'est contradictoire avec la question 2.(d).

   Ainsi si a est une racine complexe de P, alors $|a+1|=1$.

4. Supposons que $\deg(P)>0$, alors d'après le théorème de d'Alembert Gauss, P admet au moins une racine $a \in \mathbb{C}$. D'après la question précédente, on obtient que $|a+1|=|a-1|=1$. Ainsi a est l'affixe du point d'intersection des cercles de centre 1 et -1 et de rayon 1. Il s'agit du point O, c'est à dire $a=0$. Finalement, on a montré que P a pour unique racine 0.

5. Si $\deg(P)=k>0$, alors d'après les questions précédentes P est de la forme $P=\lambda X^k$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. En substituant dans $(*)$, on obtient :
$$\lambda(X^2-1)^k = \lambda^2(X-1)^k(X+1)^k$$
   Ainsi $\lambda=\lambda^2$, soit $\lambda=1$. Enfin, si $\deg(P)\leq 0$, c'est à dire si $P=\mu \in \mathbb{C}$, alors en substituant dans $(*)$, on a $\mu=\mu^2$ soit encore $\mu=0$ ou $\mu=1$.

   Réciproquement, tout polynôme de cette forme satisfait bien $(*)$.

   Ainsi, l'ensemble des polynômes satisfaisant $(*)$ est :
$$\left\{X^k \mid k \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}.$$

Exercice 2

1. Puisque $x_n \sim y_n$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} l \in \left(\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\right) \cup \{+\infty\}$, on en déduit déjà qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n>0$, $y_n>0$ et $y_n \neq 1$ pour tout $n \geq N$. De plus on a pour tout $n \geq N$:
$$\frac{\ln(x_n)}{\ln(y_n)} = \frac{\ln(y_n)+\ln(\frac{x_n}{y_n})}{\ln(y_n)} = 1 + \frac{\ln(\frac{x_n}{y_n})}{\ln(y_n)}$$
   Puisque $\lim \frac{\ln(\frac{x_n}{y_n})}{\ln(y_n)} = 0$, on en déduit que $\lim \frac{\ln(x_n)}{\ln(y_n)} = 1$, et donc que $\ln(x_n) \sim \ln(y_n)$.

2. (a) On considère la fonction $g(x)=x+e^x$. g est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x)=1+e^x>0$. Donc g est strictement croissante.
   La fonction g est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ (car $\lim\limits_{\pm\infty} g = \pm\infty$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n a donc un unique antécédent x_n par g. En d'autres termes, l'équation (E_n) possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g(x_n)=n<n+1=g(x_{n+1})$. Puisque g est strictement croissante, on en déduit $x_n<x_{n+1}$ et donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

   (c) Puisque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors soit elle est majorée et elle converge vers une limite finie, soit elle n'est pas majorée et elle diverge vers $+\infty$.
   Supposons que (x_n) converge vers une limite finie ℓ. Alors en passant à la limite dans $g(x_n)=n$, on obtient que $\lim g(x_n)=+\infty$. Or g est continue et $\lim g(x_n)=g(\ell)$ qui est finie, d'où une contradiction.
   Ainsi on peut conclure que $\lim x_n=+\infty$. Puisque de plus $x \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$, on en déduit bien que $x_n=o(e^{x_n})$.

(d) On a donc $x_n + e^{x_n} = n$, soit encore $e^{x_n} - n = -x_n = o(e^{x_n})$. Ainsi on a bien $e^{x_n} \sim n$.
En utilisant la question préliminaire, on peut prendre le logarithme dans ces équivalents :

$$x_n \sim \ln(n).$$

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - \ln(n)$.

i. Tout d'abord puisque $x_n \sim \ln(n)$, on a $y_n = x_n - \ln(n) = o(\ln(n))$.
On remplace dans (E_n) :

$$e^{y_n} = e^{x_n - \ln(n)} = \frac{e^{x_n}}{n} = \frac{n - x_n}{n} = \frac{n - \ln(n) + o(\ln(n))}{n} = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

ii. Par les croissances comparées, $\lim \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Ainsi on obtient avec la question précédente $\lim e^{y_n} = 1$, soit encore $\lim y_n = 0$. Comme enfin $e^u - 1 \sim_0 u$, on en déduit que $e^{y_n} - 1 \sim y_n$.

iii. On a d'après les questions précédentes :

$$e^{y_n} - 1 \sim y_n \quad \text{et avec (i) :} \quad e^{y_n} - 1 \sim -\frac{\ln(n)}{n}.$$

On en déduit donc que $y_n \sim -\dfrac{\ln(n)}{n}$ c'est à dire $y_n = -\dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$, et on a finalement :

$$x_n = \ln(n) + y_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$
