DS1

Correction du devoir surveillé du 19/09/15

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 11$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad u_n = 3u_{n-1} + 4u_{n-2}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : $u_n = (-1)^n + 3 \cdot 4^n$.

Initialisation :

$n = 0$: alors $u_0 = 4$ et $(-1)^0 + 3 \times 4^0 = 1 + 3 = 4$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
$n = 1$: $u_1 = 11$ et $(-1)^1 + 3 \times 4^1 = -1 + 12 = 11$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang n et au rang $n+1$. Montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est également vraie.
On a $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$, d'où par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3((-1)^{n+1} + 3 \cdot 4^{n+1}) + 4((-1)^n + 3 \cdot 4^n) \\ &= 3(-1)^{n+1} + 4(-1)^n + 3 \cdot 3 \cdot 4^{n+1} + 3 \cdot 4^{n+1} \\ &= 3((-1)^{n+1} + (-1)^n) + (-1)^n + 3 \cdot 4^{n+1} \cdot (3+1) \\ &= (-1)^n + 3 \cdot 4^{n+2} = (-1)^{n+2} + 3 \cdot 4^{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n + 3 \cdot 4^n$.

Exercice 2

1. (a) Une fonction f de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ est croissante si pour tout $x, y \in [0, +\infty[$ tels que $x \leq y$, on a $f(x) \leq f(y)$.

   (b) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|x + y| \leq |x| + |y|$.

2. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+x}. \end{array}$$

   La fonction f est bien définie sur $[0, +\infty[$ car $x + 1 > 0$ si $x \geq 0$. Elle est dérivable sur cet intervalle comme quotient de fonctions dérivables, et on a pour tout $x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

   En particulier, on obtient que $f'(x) > 0$ pour $x \in [0, +\infty[$. Donc f est (strictement) croissante sur $[0, +\infty[$.

3. Par ce qui précède on obtient donc que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(|x+y|) \leq f(|x| + |y|)$, c'est à dire :

$$\frac{|x+y|}{1 + |x+y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x| + |y|} + \frac{|y|}{1 + |x| + |y|}.$$

   Comme enfin $\frac{|x|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|}$ et $\frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|y|}{1+|y|}$, on obtient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \frac{|x+y|}{1 + |x+y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|}.$$

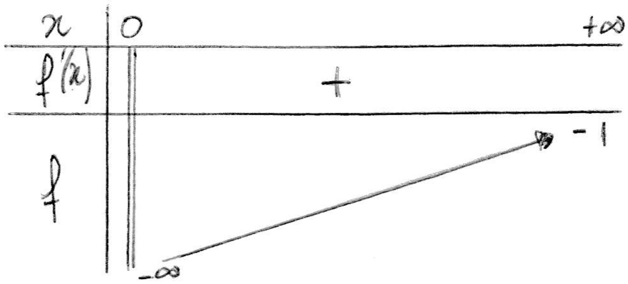
Problème I

On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x}{1-e^x} \end{array}$.

1. Étude de f

   (a) Tout d'abord, f est bien définie sur $]0,+\infty[$ car pour tout $x>0$, on a $1-e^x<0$. Elle est de plus dérivable sur cet intervalle comme quotient de fonctions dérivables, et on a pour tout $x>0$:
$$f'(x)=\frac{e^x(1-e^x)-(-e^x)e^x}{(1-e^x)^2}=\frac{e^x}{(1-e^x)^2}.$$

   (b) On observe que pour tout $x>0$, $f'(x)>0$. Donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. On obtient donc le tableau de variation suivant :



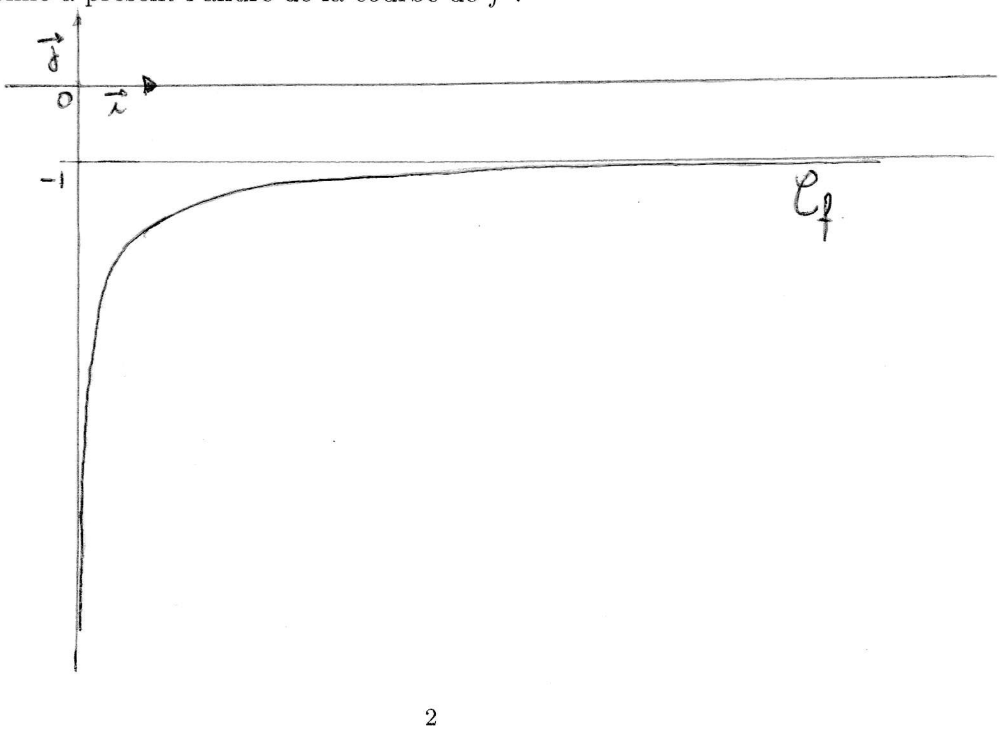
   Calculons les limites de f au bornes de son ensemble de définition.

   En 0, il n'y a pas de forme indéterminée, et on obtient par quotient : $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{e^x}{1-e^x}=-\infty$. La courbe représentative de f admet donc une asymptote verticale en 0

   En $+\infty$, on est dans le cas d'une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$". On factorise alors en bas par e^x :
$$\frac{e^x}{1-e^x}=\frac{1}{e^{-x}-1}$$

   On peut alors passer à la limite par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{-x}-1}=-1$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$ et la courbe de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y=-1$.

   On donne à présent l'allure de la courbe de f :



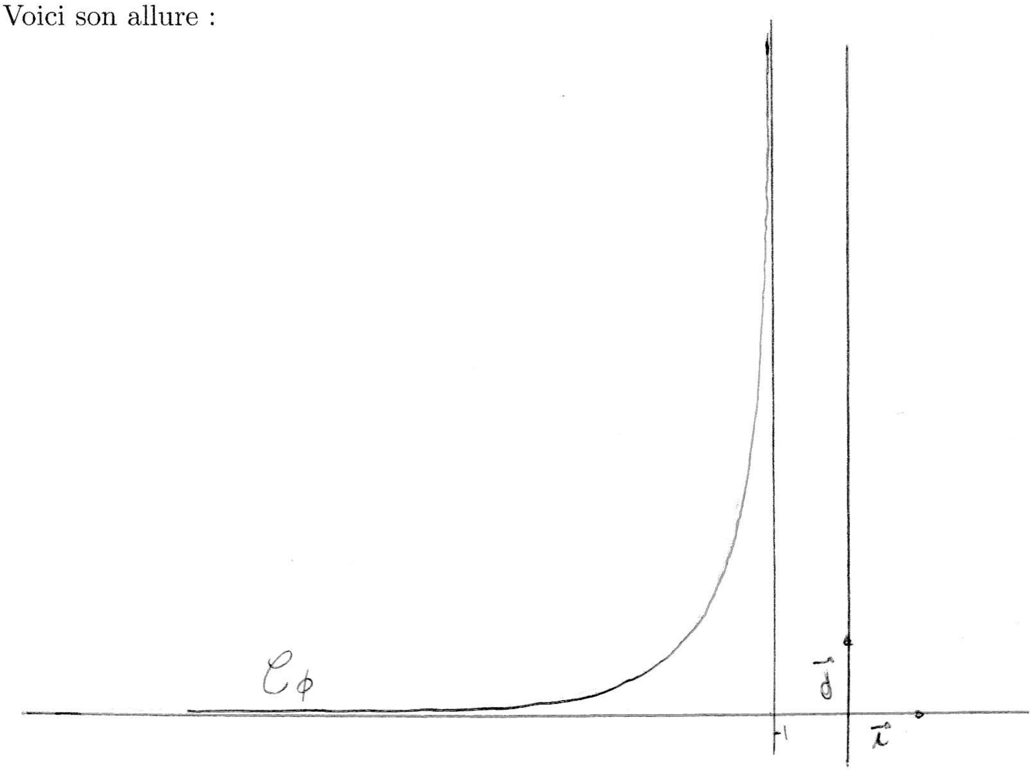
(c) Soit $x \in]0,+\infty[$, on a

$$f(x)+f(x)^2 = \frac{e^x}{1-e^x} + \frac{e^{2x}}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x(1-e^x)+e^{2x}}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x}{(1-e^x)^2} = f'(x).$$

2. On a vu que f est continue sur $]0,+\infty[$ (elle y est même dérivable) et qu'elle est strictement croissante sur cet intervalle. Par le théorème de la bijection, f réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ dans $f(]0,+\infty[) =]-\infty,-1[$.

3. Notons $\phi :]-\infty,-1[\to]0,+\infty[$ la réciproque de f. On sait alors qu'elle est continue puisque f l'est, et qu'elle a le même sens de variation que f. Ainsi ϕ est croissante strictement sur $]-\infty,-1[$.

   On obtient la courbe de ϕ à partir de celle de f en faisant son symétrique par rapport à la droite $y = x$. Voici son allure :



4. On a vu que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Ainsi, ϕ est dérivable sur $]-\infty,-1[$, et on a pour tout $y < -1$:

$$\phi'(y) = \frac{1}{f'(\phi(y))} \overset{1.(c)}{=} \frac{1}{f(\phi(y))+f(\phi(y))^2} = \frac{1}{y+y^2}.$$

5. (a) Montrons directement que f est bijective de $]0,+\infty[$ dans $]-\infty,-1[$. Pour cela, on fixe $y \in]-\infty,-1[$ et on résout l'équation $y = f(x)$. On cherche à montrer que cette équation admet une unique solution x appartenant à $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{e^x}{1-e^x} \\ &\Leftrightarrow y(1-e^x) = e^x \\ &\Leftrightarrow y - ye^x = e^x \\ &\Leftrightarrow y = e^x(1+y) \\ &\overset{y<-1}{\Leftrightarrow} \frac{y}{1+y} = e^x \\ &\overset{\ln \text{ bij.}}{\Leftrightarrow} \ln\left(\frac{y}{1+y}\right) = x \text{ car } \frac{y}{1+y} > 0 \end{aligned}$$

Reste alors à montrer que $x > 0$: on a $y < y+1 < 0$, donc $\dfrac{y}{y+1} > 1$ et on a bien $x = \ln\left(\dfrac{y}{1+y}\right) > 0$.

Ainsi on a montré que tout élément $y \in]-\infty, -1[$ admet un unique antécédent $x = \ln\left(\dfrac{y}{1+y}\right)$ par f, autrement dit que f est bijective de $]0, +\infty[$ dans $]-\infty, -1[$.

(b) D'après la question précédente, on obtient que pour tout y dans $]-\infty, -1[$, on a :

$$\phi(y) = \ln\left(\frac{y}{1+y}\right).$$

On retrouve ici que ϕ est dérivable sur $]-\infty, -1[$ comme composées de fonctions dérivables, et que pour tout $y < -1$:

$$\phi'(y) = \frac{\frac{y+1-y}{(y+1)^2}}{\frac{y}{y+1}} = \frac{1}{(y+1)^2} \times \frac{y+1}{y} = \frac{1}{(y+1)y} = \frac{1}{y^2+y}.$$

On retrouve bien le résultat de la question 4.

Problème II

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) + f(y)| = |x+y|. \qquad (E)$$

1. (a) La fonction identité f_1 vérifie (E), puisque pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_1(x) + f_1(y)| = |x+y|.$$

(b) La fonction identité f_2 vérifie (E), puisque pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_2(x) + f_2(y)| = |(-x) + (-y)| = |-x-y| = |x+y|.$$

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = |x|) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x \text{ ou } f(x) = -x) \qquad (P_2).$$

En effet, si pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a $|f(x)| = |x|$, alors $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$.

Réciproquement supposons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$. Alors $|f(x)| = |x|$ ou $|f(x)| = |-x| = |x|$, donc dans les deux cas $|f(x)| = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (E).

(a) On prend $x = y = 0$ dans (E), on obtient :

$$|f(0) + f(0)| = |0+0| = 0.$$

Ainsi $|2f(0)| = 0$, soit encore $f(0) = 0$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, et prenons $y = 0$ dans (E), on obtient alors :

$$|f(x) + f(0)| = |x+0| = |x|.$$

Puisque $f(0) = 0$, on obtient bien $|f(x)| = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) i. La négation de la propriété :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x)$$

est

$$(\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq x) \text{ et } (\exists y \in \mathbb{R},\ f(y) \neq -y).$$

ii. Par l'absurde, supposons que

$$(\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq x) \text{ et } (\exists y \in \mathbb{R},\ f(y) \neq -y).$$

En particulier, on a $x, y \neq 0$ (puisque $f(0) = 0 = -0$). Puisqu'on avait montré que $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$, on en déduit ici que $f(x) = -x$. De même, on a $f(y) = y$ Remplaçons maintenant dans (E) pour de tels x et y. On a :

$$|f(x) + f(y)| = |-x + y| = |x + y|.$$

On obtient donc $-x + y = x + y$ ou $-x + y = -(x + y)$, soit encore $x = 0$ ou $y = 0$, ce qui est impossible comme on l'a déjà remarqué.
Ainsi l'hypothèse de départ était absurde, et on obtient donc que

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x)$$

soit encore $f = f_1$ ou $f = f_2$.

4. On a vu à la question 1. que les fonctions f_1 et f_2 satisfont bien (E), ce qui représente une condition suffisante pour satisfaire (phase de Synthèse). On a ensuite montré à la question 3. que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait (E), alors une condition nécessaire est que $f = f_1$ ou $f = f_2$ (phase d'Analyse). On peut donc conclure par raisonnement d'Analyse-Synthèse que l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant (E) est :

$$\{f_1, f_2\}.$$

Problème III

Partie I : Réduction du problème.

On pose $f(x) = \exp(\lambda x)$.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (l'exponentielle l'est), elle est dérivable sur cet intervalle et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = \lambda \exp(\lambda x).$$

Puisque par hypothèse $\lambda > 0$, on obtient que $f'(x) > 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$, et donc que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus on a immédiatement $(\lambda > 0)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$. Alors $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x) = x$. Ce qui donne en revenant à l'expression de f :

$$x = f(f(x)) = e^{\lambda f(x)} = e^{\lambda e^{\lambda x}}.$$

Donc x est bien solution de (E).

(b) Réciproquement supposons que x est solution de (E) et montrons que $f(x) = x$. On raisonne par l'absurde en supposant que ce n'est pas le cas, c'est à dire que $f(x) \neq x$. On a alors deux cas possibles :

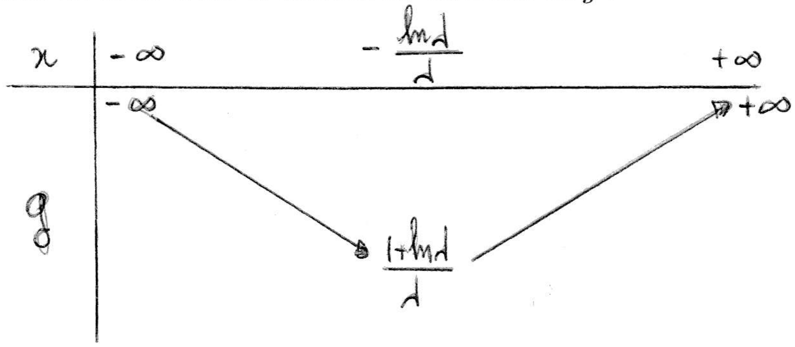
- soit $f(x) > x$: alors puisque f est strictement croissante on obtient en composant par f :
$$f \circ f(x) > f(x).$$
Mais x est solution de (E), donc $f \circ f(x) = x$. L'inégalité devient finalement $x > f(x)$ ce qui contredit notre hypothèse de départ $f(x) > x$.
- soit $x > f(x)$: de même puisque f est strictement croissante on a :
$$f(x) > f \circ f(x) = x$$
puisque x est solution de (E), d'où finalement $x < f(x)$. C'est absurde puisqu'on avait supposé $f(x) < x$.

Ainsi si x est solution de (E), on a bien $f(x) = x$.

On a donc montré ici que :
$$x \text{ est solution de (E) } \Leftrightarrow f(x) = x.$$

Partie II : Étude de l'équation $f(x) = x$.

3. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g'(x) = \lambda e^{\lambda x} - 1.$$
On a $g'(x) > 0$ si et seulement si $e^{\lambda x} > 1/\lambda$, soit encore $x > \ln(1/\lambda)/\lambda$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $]-\infty; -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}]$ et strictement croissante sur $[-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}, +\infty[$.
On calcule à présent les limites de g en $\pm\infty$:
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = -\infty \text{ par somme.}$$
En $+\infty$, on a une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$". On factorise alors par x :
$$g(x) = x\left(\frac{e^{\lambda x}}{x} - 1\right).$$
On a par croissances comparées $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\lambda x}}{x} = +\infty$, et donc par produit $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
On en déduit de cette étude le tableau de variation de g :



En particulier g admet un minimum global en $-\ln(\lambda)/\lambda$, et $g(-\ln(\lambda)/\lambda) = \dfrac{1+\ln\lambda}{\lambda}$.

4. g est continue sur $]-\infty, -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}]$ (resp. $[-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}, +\infty[$) et est strictement décroissante (resp. strictement croissante) sur cet intervalle. Elle réalise donc une bijection de $]-\infty, -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}]$ sur $[\frac{1+\ln\lambda}{\lambda}, +\infty[$ (resp. de $[-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}, +\infty[$ sur $[\frac{1+\ln\lambda}{\lambda}, +\infty[$).

Le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ (ou de $f(x) = x$) dépend alors du signe de $\frac{1+\ln\lambda}{\lambda}$. Comme

$$\frac{1+\ln\lambda}{\lambda} > 0 \Leftrightarrow \lambda > \frac{1}{e},$$

on peut alors conclure :

- si $\lambda > \frac{1}{e}$, alors l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution,
- si $\lambda = \frac{1}{e}$, alors l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution et celle-ci vaut $-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda} = e$,
- si $\lambda < \frac{1}{e}$, alors l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions, l'une d'elles appartenant à l'intervalle $]0, -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}[$ et l'autre à l'intervalle $]-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}, +\infty[$.

Partie III : Étude d'une suite associée à f.

On suppose que $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ et on note α l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $]0, -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}[$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

5. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in [0, \alpha]$.

   Initialisation : $u_0 = 0$ et $0 \in [0, \alpha]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

   Par hypothèse de récurrence, on a $0 \leq u_n \leq \alpha$. Puisque f est croissante, on peut appliquer f dans ces inéquations. On obtient :

   $$0 \leq f(u_n) \leq f(\alpha).$$

   Or $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$. D'où $u_{n+1} \in [0, \alpha]$, et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Par principe de récurrence on a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in [0, \alpha]$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$.

   Or g est décroissante strictement sur $]-\infty, -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}]$ et $g(\alpha) = 0$. Donc $g(x) \geq 0$ pour $x \in [0, \alpha]$. Ainsi $g(u_n) \geq 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est donc croissante.

7. La suite (u_n) est croissante, majorée par α puisque $u_n \in [0, \alpha]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle converge donc vers une limite finie ℓ qui appartient à l'intervalle $[0, \alpha]$.

8. On a donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. De plus on a vu que f est continue sur $\mathbb{R}$. En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ on obtient (par composition de limite) :

   $$f(\ell) = \ell.$$

   Ainsi $\ell \in [0, \alpha]$ et satisfait $f(\ell) = \ell$. Or on a établit que l'unique réel $x \in [0, \alpha]$ satisfaisant $f(x) = x$ est $x = \alpha$. On a donc $\ell = \alpha$, et la suite (u_n) converge vers α.