DS2

Devoir surveillé du 10/10/15

La calculatrice est interdite. Durée: 3h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left[\sin\left(\arccos(\cos x)\right)\right]$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
   Sur quel ensemble f est-elle continue ?
2. Montrer que f est paire.
3. Montrer que : $\forall u \in [-1,1],\ \arccos(-u) + \arccos(u) = \pi$.
4. En déduire que f est π-périodique.
5. Tracer le graphe de f.

Exercice 2

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $n \geq 2$:

$$S_n = \sum_{k=n}^{np} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right).$$

Partie 1 : Une inégalité.

Dans cette partie, on souhaite montrer l'inégalité suivante :

$$\forall x \in]0,1[, \quad 1 + x \leq e^{\mathrm{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}. \tag{E}$$

1. Montrer que l'équation $2\mathrm{sh}(x)+1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note a cette solution.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $u(x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}(x)$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \geq 0$.
3. Posons $f(x) = e^{\mathrm{sh}(x)} - x - 1$. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer l'inégalité (E)

Partie 2 : Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

5. Déduire de l'inégalité (E) :

$$\forall n \geq 2, \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right).$$

6. Déterminer alors la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

1. Soit un réel $x \in]0, 2\pi[$ et un entier naturel n. On définit la somme

$$Z = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}.$$

   Simplifier cette somme, et la mettre sous la forme $re^{i\alpha}$ (avec r et α des réels).

2. On suppose maintenant $n \geq 2$, et on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

   (a) Justifier que : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

   (b) Prouver : $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

   (c) En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

   (d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{S_n}{n}\right)$.

Problème 1

On considère dans cet exercice les fonctions f et g définies par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(x)) \text{ et } g : x \mapsto \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right).$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que $f = g$ de deux manières différentes.

1. Rappeler le domaine de définition de tan, **qu'on notera D dans la suite**.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, rappeler la relation entre $\mathrm{ch}^2(x)$ et $\mathrm{sh}^2(x)$.

3. Dans cette question on montre le résultat voulu via les dérivées.

   (a) Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

   (b) Calculer f' et g'.

   (c) En déduire le résultat voulu.

4. Dans cette question on montre le résultat voulu en utilisant tan.

   (a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $2f(x) \in D$ et calculer $\tan(2f(x))$.

   (b) En étudiant la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}$, montrer que h est à valeurs dans $]-1, 1[$.

   (c) Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $2g(x) \in D$ puis que $\tan(2g(x)) = \mathrm{sh}(x)$.

   (d) En déduire le résultat voulu.

5. Application : simplifier $\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$.

   En appliquant l'égalité $f = g$ au point $\frac{1}{2}\ln(3)$, la tangente de quel angle peut-on calculer ? On simplifiera le résultat.

Problème 2

Pour tout $n \geq 2$, on considère l'équation suivante (E_n), d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n + z + 1 = 0 \qquad (E_n)$$

1. **Cas** $n = 2$
   Déterminer les solutions de l'équation (E_2).
   Vérifier qu'elles ont toutes des modules strictement inférieurs à 2.

2. **Cas** $n = 3$
   (a) On note $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^3 + t + 1$.
   A l'aide de l'étude de f, justifier que l'équation (E_3) possède une et une seule solution réelle (que l'on notera r), et que celle-ci est dans l'intervalle $]-1, -\frac{1}{2}[$.
   (b) On note z_1 et z_1 les deux autres solutions complexes de (E_3) qu'on ne cherchera pas à calculer. On sait alors que le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ se factorise de la façon suivante :
   $$P(X) = (X - r)(X - z_1)(X - z_2).$$
   En déduire que $z_1 + z_2 = -r$ et $z_1 z_2 = \frac{-1}{r}$.
   (c) Justifier l'encadrement strict : $\frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1$.
   De même, donner une encadrement de $|z_1 z_2|$.
   (d) Si on suppose $|z_1| \geq 2$, que peut-on affirmer sur $|z_2|$?
   (e) Justifier $|z_1| < 1 + |z_2|$, puis aboutir alors à une contradiction.
   (f) Montrer que toutes les solutions de (E_3) sont de modules strictement inférieurs à 2.

3. On veut généraliser les résultats précédents à tous les entiers $n \geq 2$.
   (a) Soit n un entier $n \geq 2$. Étudier (variations, limites, signe) la fonction
   $$\varphi : \begin{array}{ccc} [2, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^n - t - 1 \end{array}$$
   (b) Montrer que, pour $z \in \mathbb{C}$, on a l'implication, pour tout entier $n \geq 2$:
   $$\Big(z^n + z + 1 = 0\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(|z| < 2\Big)$$
   (c) Que penser de la réciproque de cette implication (justifier !) ?

Problème 3

On se propose de résoudre l'équation suivante :

$$x^3 - 12x - 8 = 0 \qquad (E)$$

1. Étudier les variations, sur $\mathbb{R}$, de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 12x - 8$. En déduire le nombre de solutions réelles de l'équation (E).

2. (a) Linéariser $\cos^3(\theta)$: plus précisément, exprimer $cos^3(\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\cos(3\theta)$.
   (b) On cherche les solutions de (E) sous la forme $x = a\cos(\theta)$ (avec a et θ réels). Trouver un réel a positif pour que l'équation (E) se ramène à la résolution de $\cos(3\theta) =$ constante.
   (c) Conclure.

3. Dans cette question, on applique une autre méthode permettant de retrouver les solutions de l'équation (E). On cherche une solution de (E) sous la forme $x = u + v$, avec u et v complexes.
   (a) Montrer qu'en fixant le produit $uv = 4$, on doit avoir $u^3 + v^3 = 8$.
   (b) En déduire les valeurs possibles pour u^3 et v^3 (on mettra ces valeurs sous forme trigonométrique).
   (c) Déterminer les couples (u, v) correspondants, puis les solutions de l'équation (E).
