DS3

Correction du devoir surveillé

Exercice 1

1. On cherche les racines carrées de $-48+14i$ sous la forme $u=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Ainsi, $u^2=-48+14i$. On obtient alors :
$$\begin{cases} x^2-y^2=-48 & \text{égalité des parties réelles}\\ 2xy=14 \\ x^2+y^2=\sqrt{48^2+14^2}\end{cases}$$
Ainsi, : $\begin{cases} x^2=1\\ y^2=49\end{cases}$ donc $\begin{cases} x=\pm1\\ y=\pm7\end{cases}$. De plus, $2xy=14>0$, ainsi x et y sont de même signe. Finalement les racines carrées de $-48+14i$ sont $\pm(1+7i)$.

2. On sait que $1-i=\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi, l'ensemble des racines cubiques de $1-i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ est $\left\{2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{i\pi}{12}+\frac{2ik\pi}{3}},k\in[|0,2|]\right\}=\left\{2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{i\pi}{12}},2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{5i\pi}{12}},e^{i\frac{17i\pi}{12}}\right\}$.

3. $-8i=8e^{\frac{-i\pi}{2}}$. Ainsi, l'ensemble des racines cubiques de $-8i=e^{\frac{-i\pi}{2}}$ est $\left\{2e^{\frac{-i\pi}{6}+\frac{2ik\pi}{3}},k\in[|0,2|]\right\}=\left\{2e^{-i\frac{\pi}{6}},2e^{\frac{5i\pi}{6}},2e^{\frac{7i\pi}{6}}\right\}$. La forme cartésienne des racines cubiques de $-8i$ est : $2e^{-i\frac{\pi}{6}}=2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-i$.
$2e^{\frac{i\pi}{2}}=2i$ et $2e^{\frac{7i\pi}{6}}=2\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+2i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}-i$.

4. Soit $z\in\mathbb{C}$. Le discriminant de l'équation $z^2+(-1+9i)z-8-8i=0$ est $\Delta=(-1+9i)^2+4(8+8i)=-48+14i$. D'après la question 1, les racines carrées de Δ sont : $\pm(1+7i)$.
Ainsi, les solutions de (E_1) sont : $\frac{1-9i-1-7i}{2}=-8i$ et $\frac{1-9i+1+7i}{2}=1-i$.

5. Soit $z\in\mathbb{C}$. Posons $Z=z^3$, l'équation (E_2) se réécrit alors $Z^3+(-1+9i)Z-8-8i=0$. Ainsi, z est solution de (E_1) si et seulement si Z est solution de (E_2). Donc, en utilisant la question précédente, $Z=-8i$ ou $Z=1-i$. D'après les questions 2 et 3, les solutions de $z^3=-8i$ ou $z^3=1-i$ sont $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $2e^{\frac{i\pi}{2}}$, $2e^{\frac{7i\pi}{6}}$, $2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{i\pi}{12}}$, $2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{5i\pi}{12}}$, $e^{i\frac{17i\pi}{12}}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_2) est : $\mathcal{S}_2=\left\{2e^{-i\frac{\pi}{6}},2e^{\frac{i\pi}{2}},2e^{\frac{7i\pi}{6}},2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{i\pi}{12}},2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{5i\pi}{12}},e^{i\frac{17i\pi}{12}}\right\}$.

Exercice 2

On cherche à résoudre l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:
$$\arccos x=2\arccos\frac{3}{4}.$$
Tout d'abord, cette équation est définie pour $x\in[-1,1]$.
On a $\arccos(x)\in[0,\pi]$ pour tout $x\in[-1,1]$. D'autre part, on sait que la fonction arccos est décroissante. On a donc $\arccos(1)\leq\arccos\frac{3}{4}\leq\arccos(0)$, soit $0\leq\arccos\frac{3}{4}\leq\frac{\pi}{2}$. Ainsi $\arccos\frac{3}{4}\in[0,\pi]$.
La fonction cosinus étant bijective sur l'intervalle $[0,\pi]$, on a donc l'équivalence :
$$\begin{aligned}\arccos x=2\arccos\frac{3}{4}&\Leftrightarrow\cos(\arccos(x))=\cos\left(2\arccos\frac{3}{4}\right)\\ &\Leftrightarrow x=2\cos^2\left(\arccos\frac{3}{4}\right)-1=2\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{1}{8}.\end{aligned}$$
Finalement l'équation a une unique solution sur $[-1,1]$, qui est $x=1/8$.

Exercice 3

1. Calculons la première intégrale $I_1 = \displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2-5x+7}$.

   On est dans le cas d'une fraction rationnelle de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $\deg(Q) = 2 < \deg(P) = 0$. De plus Q est de discriminant négatif. On procède donc comme suit :

   $$I_1 = \int_1^3 \frac{dx}{(x-5/2)^2 - \frac{25}{4} + 7} = \int_1^3 \frac{dx}{(x-5/2)^2 + \frac{3}{4}}$$

   Rappelons la formule de primitive suivante avec $a > 0$ (à connaitre !)

   $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right).$$

   On obtient donc ici :

   $$\begin{aligned} I_1 &= \left[\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x-5/2)\right)\right]_1^3 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(3-5/2)\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(1-5/2)\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

   Remarque. On aurait pu aussi utiliser la formule suivante pour conclure, valable pour $x > 0$:

   $$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}.$$

   Calculons à présent $I_2 = \displaystyle\int_1^3 \frac{x+1}{x^2-5x+7}dx$.

   On est dans le cas d'une fraction rationnelle de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $\deg(Q) = 2 < \deg(P) = 1$. On se ramène donc à une fraction de la forme $\dfrac{U'}{U}$ et d'une partie en "arctangente" :

   $$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x+2}{x^2-5x+7}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x-5}{x^2-5x+7}dx + \frac{7}{2}\int_1^3 \frac{1}{x^2-5x+7}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln|x^2-5x+7|\right]_1^3 + \frac{7}{2}I_1 = \frac{1}{2}(\ln(1)-\ln(3)) + \frac{7}{2}\frac{\pi}{\sqrt{3}} \\ &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{7\pi}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

2. Notons $I = \displaystyle\int_1^e \sin(\ln(x))dx$, et effectuons le changement de variables suivant :

   $$u = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^u \quad ; \quad du = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow dx = e^u du$$

   $$x : 1 \to e \quad ; \quad u : 0 \to 1.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sin(u)e^u du = Im\left(\int_0^1 e^{(1+i)u}du\right) = Im\left(\left[\frac{e^{(1+i)u}}{1+i}\right]_0^1\right) \\ &= Im\left(\frac{e^{(1+i)}-1}{1+i}\right) = Im\left(\frac{(e\cos(1)+ie\sin(1)-1)(1-i)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(-e\cos(1)+1+e\sin(1)) \end{aligned}$$

3. Résolvons l'équation différentielle $y''+2y'+y=\cos^2(t)$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre. On résout l'équation homogène associée en calculant les solutions de l'équation caractéristique :

$$r^2+2r+1=0 \Leftrightarrow (r+1)^2=0 \Leftrightarrow r=-1.$$

Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions :

$$t \mapsto (\lambda+\mu t)e^{-t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On cherche à présent une solution particulière de l'équation. On a $\cos^2(t) = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2it}+e^{-2it}+2}{4}$ grâce à la formule d'Euler. On est donc amené à considérer les trois équations différentielles suivantes :

$$y''+2y'+y=1/2 \tag{E_1}$$

$$y''+2y'+y=\frac{e^{2it}}{4} \tag{E_2}$$

$$y''+2y'+y=\frac{e^{-2it}}{4} \tag{E_3}$$

Une solution particulière évidente de (E_1) est $t\mapsto 1/2$.

On cherche une solution particulière de (E_2) sous la forme exponentielle $\times$ polynôme, plus particulièrement sous la forme $t\mapsto Ae^{2it}$ avec $A\in\mathbb{R}$ ($2i$ n'étant pas racine de l'équation caractéristique). En remplaçant dans (E_2), on obtient $A=\frac{-3-4i}{100}$. Ainsi une solution particulière de (E_2) est donnée par :

$$t\mapsto \frac{-3-4i}{100}e^{2it}.$$

Une solution particulière de (E_3) s'obtient en prenant le conjugué :

$$t\mapsto \frac{-3+4i}{100}e^{-2it}.$$

Par principe de superposition, une solution particulière de l'équation différentielle est donc :

$$t\mapsto 1/2+\frac{-3-4i}{100}e^{2it}+\frac{-3-4i}{100}e^{2it} = 1/2-\frac{3}{50}\cos(2t)+\frac{2}{25}\sin(2t).$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :

$$\left\{t\mapsto (\lambda+\mu t)e^{-t}+1/2-\frac{3}{50}\cos(2t)+\frac{2}{25}\sin(2t)|\lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 4

Soit $m \in \mathbb{R}$. On applique l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice augmentée du système

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2m & -4m & 1-2m \\ m & 1 & -m & a \end{array}\right) \underset{\substack{L \\ \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{array}\right.}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2m-1 & -4m+2 & 1-2m \\ 0 & 1-m & m & 1 \end{array}\right)$$

- **Si $\mathbf{m} \neq \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$**

$$(A|B) \underset{\substack{L \\ L_2 \leftrightarrow \frac{L_2}{2m-1}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1-m & m & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L \\ \left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1-m)L_2 \end{array}\right.}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2-m & 2-m \end{array}\right)$$

- **Si de plus, $\mathbf{m} \neq \mathbf{2}$**

$$(A|B) \underset{\substack{L \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{2-m}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi, Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 2\}$, Le système est équivalent à $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right.$.

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S}_m = \{(1,1,1)\}$.

- **Si $\mathbf{m} = \mathbf{2}$:** en repartant de la 4ème matrice, on a:

$$(A|B) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est donc équivalent à : $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y - 2z = -1 \end{array}\right.$.

Ainsi, l'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}_2 = \{(1, -1+2z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

- **Si $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$:** en repartant de la deuxième matrice, on trouve :

$$(A|B) \underset{\substack{L \\ L_2 \leftrightarrow L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L \\ L_2 \leftarrow 2L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est donc équivalent à : $\left\{\begin{array}{l} x - 3z = -2 \\ y + z = 2 \end{array}\right.$

Ainsi, l'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}} = \{(-2+3z, 2-z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

Problème 1

I Calculs préliminaires :

1. (a) Pour $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{1+x^2}=\frac{ax^2+a+bx^2+cx}{x(1+x^2)}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}&\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \frac{a}{x}+\frac{bx+c}{1+x^2}=\frac{1}{x(1+x^2)}\right)\\ \Longleftrightarrow\quad &\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x(1+x^2)}\right)\end{aligned}$$

On résout $\begin{cases}a+b=0\\ c=0\\ a=1\end{cases}$. On obtient $a=1$, $b=-1$ et $c=0$.

(b) Une primitive de $f : x\mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$ sur I est donc $x\mapsto \ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Or, $x\geq 0$ sur I. Ainsi, une primitive de f sur I est donc $x\mapsto \ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

2. Posons :

$$\begin{aligned}u'(t)=(1-t^2)\qquad&\text{et } v(t)=\ln(t)\\ \text{d'où } u(t)=t-\frac{t^3}{3}\qquad&\text{et } v'(t)=\frac{1}{t}\end{aligned}$$

Les fonctions $t\mapsto t-\frac{t^3}{3}$ et ln sont $\mathcal{C}^1$ sur I. Ainsi, pour $x\in I$, on a, par intégration parties :

$$\begin{aligned}\int(1-x^2)\ln x dx&=\left[\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\ln x\right]-\int\left(1-\frac{x^2}{3}\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\ln x-\left[x-\frac{x^3}{9}\right]+C\\&=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\ln x-x+\frac{x^3}{9}+1-\frac{1}{9}+C\quad (C\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Ainsi une primitive de g sur I est $x\mapsto\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\ln x-x+\frac{x^3}{9}$.

3. Posons :

$$\begin{aligned}u'(t)=t\qquad&\text{et } v(t)=\ln(t)\\ \text{d'où } u(t)=\frac{t^2}{2}\qquad&\text{et } v'(t)=\frac{1}{t}\end{aligned}$$

Les fonctions $t\mapsto\frac{t^2}{2}$ et ln sont $\mathcal{C}^1$ sur I Ainsi, pour $x\in I$, on a par intégration parties :

$$\int x\ln x dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\left[\frac{x^2}{4}\right]+C=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}+C\quad(C\in\mathbb{R}).$$

Ainsi une primitive de h sur I est $x\mapsto\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}$.

II Résolution de l'équation sans second membre :

1. La fonction y_1 est deux fois dérivable sur I et pour $x\in I$, on a :

$$y_1''(x)-\frac{2x}{1+x^2}y_1'(x)+\frac{2}{1+x^2}y_1(x)=-\frac{2x}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^2}=0$$

donc y_1 est solution de (E_0).

2. y est deux fois dérivable sur I donc z est deux fois dérivable sur I comme quotient de fonctions qui le sont (le dénominateur ne s'annulant pas). Pour $x \in I$, on a :

$$\begin{array}{rl} & y(x) = xz(x) \\ \text{d'où} & y'(x) = z(x) + xz'(x) \\ \text{puis} & y''(x) = z'(x) + z'(x) + xz''(x) = 2z'(x) + xz''(x) \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rl} & \Big(y \text{ est solution de } (E_0) \text{ sur } I\Big) \\ \iff & \Big(\forall x \in I,\ y''(x) - \dfrac{2x}{1+x^2}y'(x) + \dfrac{2}{1+x^2} = 0\Big) \\ \iff & \Big(\forall x \in I,\ (2z'(x) + xz''(x)) - \dfrac{2x}{1+x^2}(z(x) + xz'(x)) + \dfrac{2}{1+x^2}xz(x) = 0\Big) \\ \iff & \Big(\forall x \in I,\ xz''(x) + 2\dfrac{1+x^2-x^2}{1+x^2}z'(x) = 0\Big) \\ \iff & \Big(\forall x \in I,\ xz''(x) + \dfrac{2}{1+x^2}z'(x) = 0 \\ \iff & \Big(z' \text{ est solution de } (E')\Big) \end{array}$$

Ainsi y est solution de (E_0) si et seulement si z' est solution de (E') $xy' + \frac{2}{1+x^2}y = 0$.

3. La solution générale de (E') est $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où A est une primitive de $x \mapsto \frac{2}{x(1+x^2)}$. Ainsi d'après le I-1.b, la solution générale de (E') est $x \mapsto \lambda \exp(-2\ln x + \ln(1+x^2)) = \lambda \frac{1+x^2}{x^2} = \lambda(1 - \frac{1}{x^2})$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. On a donc z' de la forme : $x \mapsto \lambda(1 - \frac{1}{x^2})$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, z est de la forme $x \mapsto \lambda x - \frac{\lambda}{x} + \mu$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ puis y est de la forme $x \mapsto \lambda(x^2 - 1) + \mu x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

III Résolution de l'équation :

1. (a) y_p est deux fois dérivable comme produit et somme de fonctions qui le sont et pour $x \in I$, on a :

$$y_p'(x) = \lambda'(x)x + \lambda(x) + \mu'(x)(x^2-1) + 2x\mu(x) = \lambda(x) + 2x\mu(x)$$

en utilisant la relation imposée sur λ' et μ'. Puis, pour tout $x \in I$,

$$y_p''(x) = \lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x).$$

(b) On a y_p solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{array}{rcl} (1+x^2)\ln x & = & \lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x) - \dfrac{2x}{1+x^2}(\lambda(x) + 2x\mu(x)) + \dfrac{2}{1+x^2}(\lambda(x)x + \mu(x)(x^2-1)) \\ & = & \lambda'(x) + 2x\mu'(x) + \lambda(x)\dfrac{-2x+2x}{1+x^2} + \mu(x)\dfrac{2+2x^2-4x^2+2x^2-2}{1+x^2} \\ & = & \lambda'(x) + 2x\mu'(x) \end{array}$$

(c) Soit $x \in I$, $(\lambda'(x), \mu'(x))$ est donc solution du système $\left\{\begin{array}{l} x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) = 0 \\ \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln x \end{array}\right.$

En effectuant les opérations $L_1 \longleftrightarrow L_2$ puis $L_2 \to L_2 - xL_1$, on obtient : $\left\{\begin{array}{l} \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln \\ -(x^2+1)\mu'(x) = -x(1+x^2) \end{array}\right.$

On obtient ainsi : $\mu'(x) = \frac{x(1+x^2)\ln x}{1+x^2} = x\ln x$ puis
$\lambda'(x) = (1+x^2)\ln x - 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln(x) - 2x^2\ln(x) = (1-x^2)\ln x$.
On trouve alors (avec le I-2 et le I-3) que pour $\lambda : x \mapsto \Big(x - \frac{x^3}{3}\Big)\ln x - x + \frac{x^3}{9}$ et $\mu : x \mapsto \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$, on obtient une solution particulière $y_p : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \Big(x^2 - \frac{x^4}{3}\Big)\ln x - x^2 + \frac{x^4}{9} + \frac{x^2(x^2-1)}{2}\ln x - \end{array}$

2. D'après ce qui précède, la solution générale de (E) sur I est

$$x \mapsto \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)\ln x - x^2 + \frac{x^4}{9} + \frac{x^2(x^2-1)}{2}\ln x - \frac{x^2(x^2-1)}{4} + \lambda(x^2-1) + \mu x \ , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Problème 2

1. (a) On cherche les solutions sur $\mathbb{R}$ de

$$y'(x) - y(x) = 2e^{-x} \qquad (E_+)$$

C'est une équation différentielle linéaire de degré 1, à coefficients constants, avec second membre.
Les solutions de l'équation homogène associée sont $x \mapsto \lambda e^{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière de (E_+). Le second membre étant sous forme exponentielle $\times$ polynôme, on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto Ae^{-x}$ (en notant que $-1-1=-2 \neq 0$). On obtient en remplaçant dans l'équation $A = -1$. Ainsi une solution particulière de (E_+) est $x \mapsto -e^{-x}$.
Finalement, l'ensemble des solutions de (E_+) est :

$$\left\{x \mapsto \lambda e^{x} - e^{-x} | \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

(b) On cherche les solutions sur $\mathbb{R}$ de

$$y'(x) + y(x) = 2e^{-x} \qquad (E_-)$$

C'est une équation différentielle linéaire de degré 1, à coefficients constants, avec second membre.
Les solutions de l'équation homogène associée sont $x \mapsto \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière de (E_-). Le second membre étant sous forme exponentielle $\times$ polynôme, on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto Axe^{-x}$ (en notant que $-1+1=0$). On obtient en remplaçant dans l'équation $A = 2$. Ainsi une solution particulière de (E_+) est $x \mapsto 2xe^{-x}$.
Finalement, l'ensemble des solutions de (E_+) est :

$$\left\{x \mapsto \lambda e^{-x} + 2xe^{-x} | \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. (a) Puisque f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = |f(x)| + 2e^{-x} > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) Supposons que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors $|f(x)| = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et f est solution de (E_+). On sait alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = \lambda e^{x} - e^{-x}.$$

Mais alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, ce qui contredit que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

(c) Supposons que f est strictement négative sur $\mathbb{R}$, alors f est solution de (E_-). On sait alors qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = \mu e^{x} + 2xe^{-x}.$$

Mais f n'est pas strictement croissante : en effet en dérivant, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = (2 - \lambda + 2x)e^{-x},$$

qui est strictement négatif lorsque $x < \dfrac{\lambda - 2}{2}$, strictement positif sinon. Ceci est contradictoire avec f strictement croissante. Donc f n'est pas strictement positive.

(d) Ainsi f est strictement croissante et continue. On vient de plus de voir qu'elle prend des valeurs positives et négatives. Par le théorème de la bijection, f s'annule une, et une seule fois, sur $\mathbb{R}$ en un réel que l'on notera α. L'équation de la tangente de f en α est alors donnée par :

$$y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha) = (|f(\alpha)| + 2e^{-\alpha})(x-\alpha) = 2e^{-\alpha}(x-\alpha).$$

3. Soit donc f une solution de (E). On sait par la question 2. que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et qu'elle s'annule en un unique point $\alpha \in \mathbb{R}$. De plus f est solution de (E_+) sur $]\alpha, +\infty[$ et de (E_-) sur $]-\infty, \alpha[$. Par la question 1., on en déduit que f est de la forme :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \lambda e^x - e^{-x} \text{ si } x > \alpha \\ 0 \text{ si } x = \alpha \\ \mu e^{-x} + 2xe^{-x} \text{ si } x < \alpha \end{cases}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. f étant continue en α, on obtient :

$$\lim_{x \to \alpha^-} f(x) = \mu e^{-\alpha} + 2\alpha e^{-\alpha} = 0,$$

soit $\mu = -2\alpha$. De même,

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = \lambda e^{\alpha} - e^{-\alpha} = 0,$$

soit $\lambda = e^{-2\alpha}$. Ainsi,

$$f : x \mapsto \begin{cases} 2(x-\alpha)e^{-x} & \text{si} \quad x \in]-\infty, \alpha[\\ (e^{2(x-\alpha)} - 1)e^{-x} & \text{si} \quad x \in [\alpha, +\infty[\end{cases}$$

Montrons que f est dérivable en α. On étudie pour cela la limite de son taux d'accroissement en α :

$$\lim_{x \to \alpha^-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \to \alpha^-} 2e^{-x} = 2e^{-\alpha}, \qquad \lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \to \alpha^+} 2\frac{e^{2(x-\alpha)} - 1}{2(x-\alpha)} e^{-x} = 2e^{-\alpha}.$$

Donc f est bien dérivable en α et $f'(\alpha) = 2e^{-\alpha}$.

Réciproquement, on montre qu'une telle fonction est bien solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$: elle est en effet dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation sur $]-\infty, \alpha[$, sur $]\alpha, +\infty[$, et en α :

$$f'(\alpha) - |f(\alpha)| = 2e^{-\alpha} - 0 = 2e^{-\alpha}.$$

Finalement, on a montré que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions de la forme

$$x \mapsto \begin{cases} 2(x-\alpha)e^{-x} & \text{si} \quad x \in]-\infty, \alpha[\\ (e^{2(x-\alpha)} - 1)e^{-x} & \text{si} \quad x \in [\alpha, +\infty[\end{cases}$$

où α est un réel.
