DS3

Devoir surveillé du 21/11/15

La calculatrice est interdite. Durée: 3h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.

Exercice 1

1. Déterminer les racines carrées de $-48+14i$. (On pourra utiliser : $\sqrt{48^2+14^2}=50$).
2. Déterminer les racines cubiques de $1-i$. On donnera leur expression sous forme trigonométrique.
3. Déterminer les racines cubiques de $-8i$. On donnera leur expression sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.
4. Résoudre l'équation (E_1) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$$z^2+(-1+9i)z-8-8i=0. \qquad (E_1)$$
5. On considère l'équation (E_2) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$$z^6+(-1+9i)z^3-8-8i=0. \qquad (E_2)$$
Donner la forme trigonométrique des solutions de (E_2).

Exercice 2

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\arccos x = 2\arccos\frac{3}{4}.$$

Exercice 3

Les questions 1,2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.

1. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2-5x+7}$ puis $\displaystyle\int_1^3 \frac{x+1}{x^2-5x+7}dx$ (*on donnera les résultats sous forme simplifiée*).
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^e \sin(\ln(x))dx$ à l'aide d'un changement de variable.
3. Résoudre $y''+2y'+y=\cos^2(t)$.

Exercice 4

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre, en utilisant le pivot de Gauss-Jordan, le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+y-2z &= 0 \\ x+2my-4mz &= 1-2m \\ mx+y-mz &= 1. \end{cases}$$

On précisera l'ensemble des solutions obtenu.

Problème 1

On s'intéresse ici à la résolution sur $I =]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = (1+x^2)\ln x. \qquad (E)$$

On notera (E_0) l'équation homogène associée.

I Calculs préliminaires :

1. (a) Montrer qu'il existe des réels $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

   (b) En déduire une primitive de $f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x(x^2+1)}$.

2. Donner une primitive de $g : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1-x^2)\ln x$.

3. Donner une primitive de $h : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \ln x$.

II Résolution de l'équation sans second membre :

1. Montrer que $y_1 : x \mapsto x$ est solution de (E_0).

2. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, on pose $z : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{y(x)}{x}$.
   Montrer que y est solution de (E_0) si et seulement si z' est solution de l'équation différentielle (E') $xu' + \frac{2}{1+x^2}u = 0$.

3. Résoudre l'équation différentielle (E').

4. Donner l'ensemble des solutions de (E_0).

III Résolution de l'équation :

1. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_P : x \mapsto \lambda(x)x + \mu(x)(x^2-1)$ où λ et μ sont deux fonctions deux fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in I \ , \ x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) = 0.$$

   (a) Exprimer y_P' et y_P'' en fonction de λ et μ.

   (b) Montrer que y_P est solution de (E) si et seulement si $\Big($ pour tout $x \in I$, $\lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (x^2+1)\ln x\Big)$.

   (c) Déterminer λ' et μ' à l'aide des questions précédentes puis en déduire une solution particulière de (E).

2. Donner l'ensemble des solutions de (E).

Problème 2

On considère l'équation différentielle **non linéaire** du premier ordre :

$$y'(x) - |y(x)| = 2e^{-x} \qquad (E)$$

On désire résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$, i.e. trouver les fonctions y, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que (E) est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Pour cela, on introduit les deux équations différentielles suivantes :

$$y'(x) - y(x) = 2e^{-x} \qquad (E_+)$$

et

$$y'(x) + y(x) = 2e^{-x}. \qquad (E_-)$$

1. (a) Déterminer toutes les solutions y_1 de (E_+) sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer toutes les solutions y_2 de (E_-) sur $\mathbb{R}$.
2. Supposons que f soit une fonction solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que f n'est pas strictement négative sur $\mathbb{R}$.
   (d) En déduire que f s'annule une, et une seule fois, sur $\mathbb{R}$ en un réel que l'on notera α.
   Préciser une équation de la tangente, en $x = \alpha$, à la courbe représentative de f.
3. Montrer que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions de la forme

$$x \mapsto \begin{cases} 2(x-\alpha)e^{-x} & \text{si} \quad x \in]-\infty, \alpha[\\ (e^{2(x-\alpha)} - 1)e^{-x} & \text{si} \quad x \in [\alpha, +\infty[\end{cases}$$

   où α est un réel.
