DS4

Correction du devoir surveillé

Exercice 1

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$. On définit l'ensemble somme de A et B par :

$$A + B = \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\}.$$

1. (a) Soit $x \in A+B$, alors x est de la forme $a+b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Dans ce cas particulier, on a donc $a = 0$ ou 1 et $b = 1$ ou 4. Donc $x = a + b = 1, 4, 2$ ou 5. Ainsi, $A + B = \{1, 2, 4, 5\}$.

   (b) $\subset$ Soit $x \in A+\mathbb{R}$, alors il existe $a \in A$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $x = a+b$. Or, $A \subset \mathbb{R}$ donc $a \in \mathbb{R}$. Ainsi, $x = a + b \in \mathbb{R}$ donc $A + \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$.

   $\supset$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme A est non vide, il existe $a \in A$. On a alors : $x = a + (x - a)$. Or, $a \in A$ et $x - a \in \mathbb{R}$ (car $A \subset \mathbb{R}$), donc $x \in A + \mathbb{R}$.
   Ainsi, $\mathbb{R} \subset A + \mathbb{R}$.

   Finalement, $A + \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

2. Soient $A, A', B, B' \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Supposons que $A \subset A'$ et $B \subset B'$.
   Soit $x \in A + B$. Alors, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$. Or, $A \subset A'$ donc $a \in A'$ et $B \subset B'$, donc $b \in B'$. Ainsi, $x \in A' + B'$. D'où, $A + B \subset A' + B'$.

3. Soient $A_1, A_2, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

   $\supset$ Soit $x \in (A_1 \cup A_2) + B$. Alors, il existe $a \in A_1 \cup A_2$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$. Donc $a \in A_1$ ou $x \in A_2$. Si $a \in A_1$, alors $x \in A_1 + B$. Si $a \in A_2$, alors $x \in A_2 + B$.
   Donc $x \in (A_1 + B) \cup (A_2 + B)$, et on a donc $(A_1 \cup A_2) + B \subset (A_1 + B) \cup (A_2 + B)$.

   $\subset$ Soit $x \in (A_1 + B) \cup (A_2 + B)$. Alors $x \in A_1 + B$ ou $x \in A_2 + B$. Or, $A_1 \subset A_1 \cup A_2$ et $A_2 \subset A_1 \cup A_2$. Donc d'après la question 1, $(A_1 + B) \subset (A_1 \cup A_2) + B$ et $(A_2 + B) \subset (A_1 \cup A_2) + B$. Ainsi, $x \in (A_1 \cup A_2) + B$ dans les deux cas. Donc, $(A_1 + B) \cup (A_2 + B) \subset (A_1 \cup A_2) + B$.

   Finalement, $(A_1 + B) \cup (A_2 + b) = (A_1 \cup A_2) + B$.

4. (a) Soient $A_1, A_2, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
   Soit $x \in (A_1 \cap A_2) + B$. Alors, il existe $a \in A_1 \cap A_2$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$. Comme $a \in A_1$, $x \in A_1 + B$ et comme $x \in A_2$, $x \in A_2 + B$. Donc $x \in (A_1 + B) \cap (A_2 + B)$.
   Ainsi, $(A_1 \cap A_2) + B \subset (A_1 + B) \cap (A_2 + B)$.

   (b) En prenant $A_1 = \{0, 1\}$, $A_2 = \{1, 3\}$, et $B = \{1, 4\}$.
   On a : $A_1 \cap A_2 = \{1\}$ d'où $(A_1 \cap A_2) + B = \{2, 5\}$.
   $A_1 + B = \{1, 2, 4, 5\}$ et $A_2 + B = \{2, 4, 5, 7\}$ d'où $(A_1 + B) \cup (A_2 + B) = \{2, 4, 5\}$.
   Donc $(A_1 \cap A_2) + B \neq (A_1 + B) \cap (A_2 + B)$. Ainsi, il n'y a pas égalité (dans le cas général) entre les ensembles $(A_1 \cap A_2) + B$ et $(A_1 + B) \cap (A_2 + B)$.

Exercice 2

Soit (u_n) une suite bornée : il existe M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{u_k | k \geq n\}$ et une partie non vide (elle contient par exemple u_n) et bornée de $\mathbb{R}$ (minorée par $-M$, majorée par M). Elle admet donc une borne inférieure, notée w_n, et une borne supérieure, notée v_n.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'inclusion :

$$\{u_k|k \geq n+1\} \subset \{u_k|k \geq n\}.$$

D'une part, v_n est un majorant de la partie $\{u_k|k \geq n\}$. C'est donc aussi un majorant de $\{u_k|k \geq n+1\}$. Par comparaison d'un majorant au plus petit d'entre eux, on en déduit :

$$v_{n+1} = \sup\{u_k|k \geq n+1\} \leq v_n.$$

Donc (v_n) est une suite décroissante.

D'autre part, w_n est un minorant de $\{u_k|k \geq n\}$. C'est donc aussi un minorant de $\{u_k|k \geq n+1\}$. Par comparaison d'un minorant au plus grand d'entre eux, on en déduit :

$$w_{n+1} = \sup\{u_k|k \geq n+1\} \geq w_n.$$

Donc (w_n) est une suite croissante.

On obtient ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_0 \leq w_n \leq v_n \leq v_0.$$

La suite (v_n) est décroissante, minorée par w_0. Elle converge donc vers une limite $l_1 \in \mathbb{R}$.

La suite (w_n) est croissante, majorée par v_0. Elle converge donc vers une limite $l_2 \in \mathbb{R}$.

3. On procède par double implication.

   $\Leftarrow$ Supposons que $\lim v_n = \lim w_n$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n \leq u_n \leq v_n$. Par le théorème des gendarmes, (u_n) converge (et $\lim u_n = l_1 = l_2$).

   $\Rightarrow$ Supposons que (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, et montrons qu'alors $\lim v_n = \lim w_n = \lim u_n$. On a : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |u_n - l| \leq \varepsilon,$$

   soit encore $l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon$. Ainsi, $l - \varepsilon$ (resp. $l + \varepsilon$) est un minorant (resp. un majorant) de la partie $\{u_k|k \geq N\}$. Par comparaison d'un minorant au plus grand d'entre eux (resp. d'un majorant au plus petit d'entre eux), on obtient :

$$l - \varepsilon \leq w_N \leq v_N \leq l + \varepsilon.$$

   Enfin puisque (w_n) est croissante et (v_n) est décroissante, on a pour tout $n \geq N$,

$$l - \varepsilon \leq w_N \leq w_n \leq v_n \leq v_N \leq l + \varepsilon,$$

   et donc $|w_n - l| \leq \varepsilon$ et $|v_n - l| \leq \varepsilon$. On a donc bien montré que $\lim w_n = \lim v_n$.

Exercice 3

Un ensemble E est dit *dénombrable* s'il existe une bijection entre l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et E. Cette bijection permet alors de numéroter les éléments de E.

On admettra dans la suite le résultat suivant :

> *Étant donné deux ensembles E et F, s'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection entre E et F.*

1. Montrons que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est dénombrable. Il faut donc trouver une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$. Prenons
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*, n \mapsto n+1.$$
On vérifie sans peine que f est bijective en montrant par exemple que pour $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, n \mapsto n-1$, on a :
$$g \circ f = Id_{\mathbb{N}} \ \text{ et } f \circ g = Id_{\mathbb{N}^*}.$$
Donc $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.
Montrons que $\mathcal{P} = \{2k | k \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable. Considérons pour cela l'application $h : \mathbb{N} \to \mathcal{P}$ définie par :
$$h(k) = 2k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$
On vérifie facilement que h est bijective, en montrant par exemple que pour $i : \mathcal{P} \to \mathbb{N}, n \mapsto n/2$, on a :
$$i \circ h = Id_{\mathbb{N}} \ \text{ et } h \circ i = Id_{\mathcal{P}}.$$
Donc $\mathcal{P}$ est dénombrable.

2. Considérons $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$\varphi(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$
   (a) Montrons que φ est bien définie. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a deux cas :
   - soit n est pair, et dans ce cas $\dfrac{n}{2}$ est bien un entier ;
   - soit n est impair, et dans ce cas $\dfrac{n+1}{2}$ est bien un entier également.

   Dans tous les cas, $\varphi(n)$ appartient à $\mathbb{Z}$, et φ est bien définie.

   (b) Montrons que φ est bijective.
   - φ est injective : soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$. On a deux cas possibles :
     - $\varphi(n_1) = \varphi(n_2) \leq 0$: dans ce cas n_1 et n_2 sont tous les deux pair par définition de φ. Donc on a :
     $$\varphi(n_1) = \varphi(n_2) \Rightarrow \frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{2} \Rightarrow n_1 = n_2.$$
     - $\varphi(n_1) = \varphi(n_2) < 0$: alors n_1 et n_2 sont tous les deux impair, et donc :
     $$\varphi(n_1) = \varphi(n_2) \Rightarrow -\frac{n_1+1}{2} = -\frac{n_2+1}{2} \Rightarrow n_1 = n_2.$$

     Dans tous les cas, on a montré que $n_1 = n_2$. Donc φ est bien injective.
   - φ est surjective : soit $k \in \mathbb{Z}$, on cherche un antécédent $n \in \mathbb{N}$ de k par φ. On a deux cas :
     - si $k \geq 0$, alors $n = 2k$ convient puisque $\varphi(2k) = \dfrac{2k}{2} = k$.
     - si $k < 0$, alors $n = -2k-1 \in \mathbb{N}$ convient puisque $\varphi(-2k-1) = -\dfrac{-2k-1+1}{2} = k$.

     Ainsi, φ est bien surjective.

   On a montré que φ est injective et surjective. Elle est donc bijective. Il existe donc bien une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, donc $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

3. Considérons $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$ définie par :
$$\psi(p, q) = 2^p(2q+1).$$

(a) Montrons que l'application ψ est injective. Soient pour cela (p_1, q_1) et $(p_2, q_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\psi(p_1, q_1) = \psi(p_2, q_2)$. On a donc :

$$2^{p_1}(2q_1 + 1) = 2^{p_2}(2q_2 + 1).$$

Quitte à renuméroter, on peut supposer par exemple que $p_1 \geq p_2$. On obtient l'égalité d'entiers

$$2^{p_1 - p_2}(2q_1 + 1) = (2q_2 + 1).$$

Ainsi $2^{p_1-p_2}(2q_1 + 1)$ est un entier impair. Donc nécessairement $p_1 - p_2 = 0$, et $p_1 = p_2$. En reprenant l'égalité ci-dessus, on obtient alors en remplaçant $q_1 = q_2$.

Donc ψ est bien injective.

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a $\mathcal{P}(n)$ "il existe $(p, q) \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^p(2q + 1)$".

- Initialisation : pour $n = 1$, le couple $(p, q) = (0, 0)$ convient. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vrai.
- Hérédité : Soit $n \geq 1$ et supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour tout $1 \leq k \leq n$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a deux cas possibles.
  - soit $n + 1$ est impair. Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 = 2k + 1$. Le coupe $(p, q) = (0, k)$ convient.
  - soit $n + 1$ est pair. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 = 2k$. Par hypothèse de récurrence, il existe $(p', q') \in \mathbb{N}^2$ tels que $k = 2^{p'}(2q'+1)$. Alors $n+1 = 2^{p'+1}(2q'+1)$, et le coupe $(p, q) = (p' + 1, q')$ convient.

  Dans tous les cas, on a montré que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on a pour tout $n \geq 1$, l'existence de $(p, q) \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^p(2q + 1)$.

En particulier, on a donc que ψ est surjective.

(c) On a ainsi montré que ψ est injective et surjective. C'est donc une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^*$. Or, on a donné à la question 1. une bijection g de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$. Par composition, $\Psi = \psi \circ g$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. Ainsi il existe bien une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$, et $\mathbb{N}^2$ est bien dénombrable.

4. (a) Considérons $j : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto n$. Cette application est clairement une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.

(b) Montrons que $\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ qui à $r \in \mathbb{Q}$ associe le couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec $\frac{p}{q}$ le représentant irréductible de r est injective : soient pour cela $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, $r_1 = \dfrac{p_1}{q_1}$, $r_2 = \dfrac{p_2}{q_2}$ leurs représentants irréductibles. Supposons que $\phi(r_1) = \phi(r_2)$. Alors :

$$(p_1, q_1) = (p_2, q_2) \Rightarrow p_1 = p_2 \text{ et } q_1 = q_2 \to r_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = r_2.$$

Donc ϕ est injective.

ϕ n'est pas surjective : par exemple $(2, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, mais $(2, 2)$ n'a pas d'antécédent par ϕ : sinon il existe r tel que $\phi(r) = (2, 2)$. Alors $r = \frac{2}{2} = 1$. Or l'écriture irréductible de 1 est $\frac{1}{1}$. Donc $\phi(1) = (1, 1) \neq (2, 2)$. COntradiction.

(c) On a déjà une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Il nous suffit donc de déterminer une injection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ (on aura alors une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$ en composant).

On a montré déterminé dans les paragraphes précédents :

- une bijection g de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$;
- une bijection φ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$;
- une bijection Ψ de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

Considérons alors l'application $\Phi : \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^2, (k,n)\mapsto(\varphi(k),g(n))$ et montrons que Φ est bijective : pour tout $(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2$ et $(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi(k_1,k_2)=(n_1,n_2) &\Leftrightarrow (\varphi(k_1),g(k_2))=(n_1,n_2)\\ &\Leftrightarrow \varphi(k_1)=n_1 \text{ et } g(k_2)=n_2\\ &\Leftrightarrow k_1=\varphi^{-1}(n_1) \text{ et } k_2=g^{-1}(n_2).\end{aligned}$$

Ainsi tout élément de l'ensemble $\mathbb{N}^2$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ par Φ. Donc Φ est bijective.

Finalement, on a :

$$\mathbb{Q}\xrightarrow{\phi}\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*\xrightarrow{\Phi}\mathbb{N}^*\xrightarrow{\Psi}\mathbb{N}$$

et toutes ces applications sont injectives. Par composition, on obtient une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.

(d) On a donc construit une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$, puis une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$. En utilisant le résultat admis dans l'énoncé, on en déduit qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$. Donc $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels non nuls, on lui associe la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ p_n=\prod_{k=1}^{n}u_k=u_1\times u_2\times\cdots\times u_n$$

On dit que le produit (p_n) converge si et seulement si la suite (p_n) admet une limite finie non nulle. Sinon, on dit que le produit (p_n) diverge.

Partie I :

1. On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=u_{n+1}$. Supposons que (p_n) converge vers une limite ℓ non nulle. Alors par opération sur les limites, on a :

$$\lim\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{\ell}{\ell}=1$$

Ainsi $\lim u_{n+1}=1$, et donc $\lim u_n=1$.

Donc si le produit (p_n) converge, il est nécessaire que la suite (u_n) converge vers 1.

2. On prend dans cette question : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=1+\dfrac{1}{n}$.

(a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $u_n=\dfrac{n+1}{n}$, donc :

$$p_n=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}=n+1$$

par télescopage.

(b) On a $\lim p_n=+\infty$, donc (p_n) diverge. On a $\lim u_n=1$ donc (u_n) converge vers 1. Ainsi pour que (p_n) converge, il est nécessaire que la suite (u_n) converge vers 1. Mais ce n'est pas suffisant comme l'a montré cet exemple.

3. On prend dans cette question $u_n=\cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et où $a\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

Pour $n\geq 1$, on pose $q_n=p_n\times\sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$.

(a) On a pour tout $n \geq 1$

$$q_{n+1} = p_{n+1} \times \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) = p_n \times \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) \times \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)$$
$$= p_n \times \frac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{2} = \frac{1}{2}q_n$$

Donc la suite (q_n) est géométrique.

(b) Puisque (q_n) est géométrique, on obtient que pour tout $n \geq 1$,

$$q_n = (1/2)^{n-1}q_1 = (1/2)^{n-1}q_1 = (1/2)^{n-1} \times \cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \sin\left(\frac{a}{2}\right) = (1/2)^n \sin(a).$$

Ainsi, $p_n \times \sin\left(\frac{a}{2^n}\right) = (1/2)^n \sin(a)$. Et puisque $a \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\frac{a}{2^n} \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on a $\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) \neq 0$. On peut donc conclure que pour tout $n \geq 1$, $p_n = \dfrac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$.

(c) On a $\lim 2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right) = \lim a \times \dfrac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\frac{a}{2^n}} = a$. Ainsi, $\lim p_n = \frac{\sin(a)}{a} \in \mathbb{R}^a st$ et le produit (p_n) converge bien.

Partie II :

Soit $p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + v_k)$ où $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

1. On pose $f(x) = x - \ln(1 + x)$ pour tout $x \in I =]-1, +\infty[$. La fonction f est définie sur I, dérivable sur cet intervalle, et pour tout $x \in I$ on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Ainsi, f est croissante sur $[0, +\infty[$ et $f(0) = 0$. Donc $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et $\ln(1+x) \leq x$.

2. On a pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 + v_{n+1} > 1 \text{ et } S_{n+1} - S_n = v_{n+1} > 0.$$

Ainsi, les suites (p_n) et (S_n) sont toutes les deux croissantes.

3. Pour tout $k \geq 1$, on a :

$$\ln(1 + v_k) \leq v_k$$

En sommant pour k entre 1 et n ($n \geq 1$), on obtient :

$$\ln(p_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + v_k) \leq \sum_{k=1}^{n} v_k \leq S_n.$$

D'où $p_n \leq e^{S_n}$ pour tout $n \geq 1$. Or la suite (S_n) converge, donc (e^{S_n}) est bornée. On en déduit que la suite (p_n) est croissante, majorée. Elle converge donc vers une limite ℓ non nulle (puisque $\ell \geq p_1 = 1 + v_1 > 1$).

4. Supposons que $v_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $u_n = 1 + \frac{1}{n}$. On a montré qu'alors $p_n = n + 1$. De plus par ce qu'on a fait précédement,

$$\ln(p_n) \leq S'_n$$

Puisque $\lim \ln(p_n) = +\infty$, on obtient par théorème de comparaison que $\lim S'_n = +\infty$. On retrouve ici que la série harmonique diverge (résultat déjà établit en cours).

Partie III :
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on prend $p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a^{2^k})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $a \geq 1$, alors $u_n = 1 + a^{2^n} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc (u_n) ne peut converger vers 1 et le produit (p_n) est donc divergent.

2. On suppose que $a \in]0, 1[$:

   (a) On utilise les question précédentes en considérant la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} a^{2^k}$. On a :

   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} a^{2^k} \leq S_n = \sum_{k=1}^{2^n} a^k \leq a\frac{1-a^{2^n}}{1-a} \leq \frac{1}{1-a}.$$

   La suite (S_n) est donc croissante et majorée, elle converge. On en déduit par la Partie II que le produit associé (p_n) converge.

   (b) Pour $n \geq 1$, on a :

   $$\begin{aligned}(1-a^2)p_n &= (1-a^2)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)\dots(1+a^{2^n}) \\ &= (1-a^4)(1+a^4)(1+a^8)\dots(1+a^{2^n}) \\ &= (1-a^8)(1+a^8)\dots(1+a^{2^n}) \\ &= \dots = 1 - a^{2^{n+1}}\end{aligned}$$

   (c) On a $\lim 1 - a^{2^{n+1}} = 1$ puisque $0 < a < 1$. Donc $\lim(1-a^2)p_n = 1$, et on en conclut, puisque $1 - a^2 \neq 0$, que :

   $$\lim p_n = \frac{1}{1-a^2}.$$
