DS4

Devoir surveillé du 12/12/15

La calculatrice est interdite. Durée: 3h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.

Exercice 1

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$. On définit l'ensemble somme de A et B par :

$$A + B = \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\}.$$

1. (a) On pose $A = \{0, 1\}$ et $B = \{1, 4\}$. Calculer $A + B$.

   (b) Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que $A \neq \emptyset$. Montrer que $A + \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

2. Montrer que :

$$\forall A, A', B, B' \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ (A \subset A' \text{ et } B \subset B') \Rightarrow A + B \subset A' + B'.$$

3. Montrer que :

$$\forall A_1, A_2, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ (A_1 \cup A_2) + B = (A_1 + B) \cup (A_2 + B).$$

4. (a) Montrer que :

$$\forall A_1, A_2, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ (A_1 \cap A_2) + B \subset (A_1 + B) \cap (A_2 + B).$$

   (b) L'inclusion réciproque est-elle vraie?

Exercice 2

Soit (u_n) une suite bornée.

1. Montrer que l'on peut poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sup\{u_k | k \geq n\}$ et $w_n = \inf\{u_k | k \geq n\}$.
2. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont monotones. En déduire qu'elles convergent.
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente si et seulement si $\lim v_n = \lim w_n$.

Exercice 3

Un ensemble E est dit *dénombrable* s'il existe une bijection entre l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et E. Cette bijection permet alors de numéroter les éléments de E.

On admettra dans la suite le résultat suivant :

> *Étant donné deux ensembles E et F, s'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection entre E et F.*

1. Montrer que les ensembles $\mathbb{N}^*$ et $\mathcal{P} = \{2k | k \in \mathbb{N}\}$ sont dénombrables.
2. Dans cette question on désire établir que $\mathbb{Z}$ est dénombrable. On introduit l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\varphi(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

   (a) Montrer que l'application φ est bien définie.
   (b) Montrer que φ est bijective. Conclure.

3. Dans cette question, on souhaite établir que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. Pour cela, on introduit l'application $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$ définie par :

$$\psi(p,q) = 2^p(2q+1).$$

   (a) Montrer que l'application ψ est injective.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, il existe $(p,q) \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^p(2q+1)$.
   (c) Conclure que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

4. Dans cette question, on souhaite établir que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
   (a) Exhiber une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.
   (b) On appelle représentant irréductible d'un nombre rationnel r l'unique fraction irréductible $\frac{p}{q}$ égale à r avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
   Observer que l'application $\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ qui à $r \in \mathbb{Q}$ associe le couple $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec $\frac{p}{q}$ le représentant irréductible de r est injective. Est-elle surjective ?
   (c) Former une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.
   (d) Conclure que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels non nuls, on lui associe la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$$

On dit que le produit (p_n) converge si et seulement si la suite (p_n) admet une limite finie non nulle. Sinon, on dit que le produit (p_n) diverge.

Partie I :

1. En considérant le rapport $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$, montrer que si le produit (p_n) converge, il est nécessaire que la suite (u_n) converge vers 1.

2. On prend dans cette question $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = n+1$.
   (b) Quelle est la nature du produit ? Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Conclusion ?

3. On prend dans cette question $u_n = \cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et où $a \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
   Pour $n \geq 1$, on pose $q_n = p_n \times \sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$.
   (a) Montrer que la suite (q_n) est géométrique.
   (b) Montrer que $p_n = \dfrac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right)}$.
   (c) En déduire que le produit (p_n) converge et donner sa limite.

Partie II :
Soit $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+v_k)$ où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(1+x) < x$.
2. Étudier la monotonie des suites (p_n) et (S_n).
3. Montrer que si la suite (S_n) converge, alors le produit (p_n) converge.

Déduire de la partie I la limite de la suite (S'_n) définie par $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Partie III :
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on prend $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a^{2^k})$.

1. Quelle est la nature du produit (p_n) lorsque $a \geq 1$?
2. On suppose que $a \in]0,1[$:
   (a) Montrer que le produit (p_n) converge.
   (b) Pour $n \geq 1$, calculer $(1-a^2)p_n$.
   (c) En déduire la limite de la suite (p_n).