DS6

Correction du devoir surveillé

Exercice 1

1. On considère la fonction ϕ définie par :

$$\forall x \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right],\ \phi(x) = f\left(\frac{a+b}{2}+x\right) - f\left(\frac{a+b}{2}-x\right) - 2xf'\left(\frac{a+b}{2}\right) - Kx^3.$$

ϕ est bien définie sur $\left[0, \frac{b-a}{2}\right]$ car $\forall x \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$, on a :

$$\frac{a+b}{2}+x, \frac{a+b}{2}-x \in [a,b].$$

On choisit K tel que $\phi\left(\frac{b-a}{2}\right) = 0$:

$$f(b) - f(a) - 2\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - K\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = 0$$

soit $K = \left(\frac{2}{b-a}\right)^3 \left(f(b) - f(a) - 2\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ car $b \neq a$.

2. On a $\phi(0) = \phi\left(\frac{b-a}{2}\right) = 0$. Par le théorème de Rolle (ϕ continue sur $\left[0, \frac{b-a}{2}\right]$, dérivable sur $\left]0, \frac{b-a}{2}\right[$), il existe $c_1 \in \left]0, \frac{b-a}{2}\right[$ tel que $\phi'(c_1) = 0$.

3. On a $\phi'(x) = f'\left(\frac{a+b}{2}+x\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}-x\right) - 2f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - 3Kx^2$. Ainsi $\phi'(0) = 0$ et $\phi'(c_1) = 0$. Par le théorème de Rolle (ϕ continue sur $[0, c_1]$, dérivable sur $]0, c_1[$), on en déduit qu'il existe $c_2 \in]0, c_1[$ tel que $\phi''(c_2) = 0$.

4. On sait que $c_2 \in]0, c_1[\subset \left]0, \frac{b-a}{2}\right[$ donc $\frac{a+b}{2} - c_2 \in \left]a, \frac{a+b}{2}\right[$ et $\frac{a+b}{2} + c_2 \in \left]\frac{a+b}{2}, b\right[$.
Ainsi, $\left[\frac{a+b}{2} - c_2, \frac{a+b}{2} + c_2\right] \subset]a, b[$. Or, f'' est continue sur $[a,b]$ donc sur $\left[\frac{a+b}{2} - c_2, \frac{a+b}{2} + c_2\right]$ et dérivable sur $]a,b[$ donc sur $\left[\frac{a+b}{2} - c_2, \frac{a+b}{2} + c_2\right]$ donc d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in \left]\frac{a+b}{2} - c_2, \frac{a+b}{2} + c_2\right[$ tel que

$$f''\left(\frac{a+b}{2}+c_2\right) - f''\left(\frac{a+b}{2}-c_2\right) = f^{(3)}(c)\left(\frac{a+b}{2}+c_2 - \left(\frac{a+b}{2}-c_2\right)\right) = f^{(3)}(c)2c_2.$$

5. Pour tout $x \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$, $\phi''(x) = f''\left(\frac{a+b}{2}+x\right) - f''\left(\frac{a+b}{2}-x\right) - 6Kx$.
Or, on sait que $f''\left(\frac{a+b}{2}+c_2\right) - f''\left(\frac{a+b}{2}-c_2\right) = 6Kc_2$, d'après la question 3. D'où en utilisant la question 4, $f^{(3)}(c)2c_2 = 6Kc_2$, . Or, $c_2 \neq 0$. Ainsi,

$$f^{(3)}(c) = 3K = \frac{24\left(f(b) - f(a) - (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)}{(b-a)^3}$$

d'après la question 1. On obtient finalement que $f(b) - f(a) - (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f^{(3)}(c)\frac{(b-a)^3}{24}$ ce qui était demandé.

Exercice 2

Partie I.

1. La fonction cosinus est bien continue sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(x+y)+\cos(x-y) &= (\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)) + (\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)) \\ &= 2\cos(x)\cos(y)\end{aligned}$$

Donc cos est bien dans l'ensemble $\mathcal{E}$.

2. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}ch(x)ch(y)+sh(x)sh(y) &= \frac{1}{4}\left((e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})+(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{x+y}+e^{x-y}+e^{y-x}+e^{-x-y}+e^{x+y}-e^{x-y}-e^{y-x}+e^{-x-y}\right) \\ &= \frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2} = ch(x+y)\end{aligned}$$

Dès lors, on a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}ch(x+y)+ch(x-y) &= ch(x)ch(y)+sh(x)sh(y)+ch(x)ch(y)-sh(x)sh(y) \\ &= 2ch(x)ch(y)\end{aligned}$$

Comme de plus ch est continue sur $\mathbb{R}$, on conclut que ch appartient bien à $\mathcal{E}$.

3. Soit f dans $\mathcal{E}$. Pour tout réel α, la fonction f_α de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f_\alpha(x) = f(\alpha x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues. De plus, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}f_\alpha(x+y)+f_\alpha(x-y) &= f(\alpha x+\alpha y)+f(\alpha x-\alpha y) \\ &= 2f(\alpha x)f(\alpha y) \text{ car } f \in \mathcal{E} \\ &= 2f_\alpha(x)f_\alpha(y)\end{aligned}$$

Ainsi f_α est dans $\mathcal{E}$.

Remarque. On en déduit par exemple que $x \mapsto \cos(\omega x)$ est dans $\mathcal{E}$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

4. Soit $f \in \mathcal{E}$.

   (a) Prenons $x = y = 0$, on obtient :

$$f(0)+f(0) = 2f(0)^2 \quad \Rightarrow \quad f(0)(f(0)-1) = 0.$$

   Ainsi $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$ (on utilise ici que $\mathbb{R}$ est intègre).

   (b) Supposons que $f(0) = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$2f(x) = f(x+0)+f(x-0) = 2f(x)f(0) = 0.$$

   Donc f est la fonction identiquement nulle.

   (c) Supposons $f(0) = 1$. Tout d'abord, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à l'origine. De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$f(y)+f(-y) = f(0+y)+f(0-y) = 2f(0)f(y) = 2f(y).$$

   Ainsi, $f(-y) = f(y)$ et f est une fonction paire.

Partie II.

Soit f un élément de $\mathcal{F}$. On pose $E = \{x > 0 | f(x) = 0\}$.

1. (a) Par définition de $\mathcal{F}$, f n'est pas la fonction nulle. Par la partie I, on a donc $f(0) \neq 0$, et donc $f(0) = 1$.
   De plus, toujours par définition de $\mathcal{F}$, f s'annule au moins une fois, disons en un réel α. Alors $\alpha \neq 0$. Si $\alpha > 0$, c'est bon. Si $\alpha < 0$, alors $-\alpha > 0$, et comme f est paire on a $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$.
   Ainsi on a bien que $f(0) = 1$, et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) D'après la question précédente, E est une partie non vide. Elle est de plus minorée par 0 (par définition de E). Elle admet donc une borne inférieure que l'on notera a.

   (c) Par caractérisation de la borne inférieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_\varepsilon \in E$ tel que
   $$a \leq u_\varepsilon \leq a + \varepsilon.$$
   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ($\varepsilon = 1/n$), il existe $u_n \in E$ tel que $a \leq u_n \leq a + \dfrac{1}{n}$.

   (d) Tout d'abord, par théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim u_n = a$. De plus on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 0$. Comme f est continue, on obtient par caractérisation séquentielle de la continuité :
   $$0 = \lim f(u_n) = f(a).$$
   Ainsi, on a $f(a) = 0$. Comme enfin $a \geq 0$ et que $f(0) = 1$, on a bien $a > 0$.

   (e) Par définition de la borne inférieure, pour tout $x \in]0, a[$, on a $x \notin E$ et donc $f(x) \neq 0$. De plus $f(0) = 1$, donc $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0, a[$.
   La fonction f est continue sur $[0, a[$, elle ne s'annule pas sur cet intervalle. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle garde un signe constant sur cet intervalle. Comme de plus $f(0) = 1$, on en déduit que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [0, a[$.

   Remarque. Rappelons comment on montre ce résultat : supposons que f n'ait pas un signe constant sur $[0, a[$, alors il existerait $x_0, x_1 \in [0, a[$ tels que $f(x_0)f(x_1) < 0$. Puisque f est continue, on en déduit par le TVI qu'il existe c dans $[0, a[$ tel que $f(c) = 0$. C'est contradictoire avec $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0, a[$.

2. On considère l'ensemble $D_a = \left\{ a\dfrac{p}{2^q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$.

   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la suite (y_n) par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = a\frac{\lfloor \frac{2^n x}{a} \rfloor}{2^n}.$$
   Alors par définition de la partie entière, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\lfloor \frac{2^n x}{a} \rfloor \leq \frac{2^n x}{a} < \lfloor \frac{2^n x}{a} \rfloor + 1.$$
   D'où :
   $$\frac{2^n x}{a} - 1 < \lfloor \frac{2^n x}{a} \rfloor \leq \frac{2^n x}{a}.$$
   On en déduit l'encadrement suivant pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$x - \frac{a}{2^n} < y_n = a\frac{\lfloor \frac{2^n x}{a} \rfloor}{2^n} \leq x$$
   Puisque $\lim x - \frac{a}{2^n} = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim y_n$ existe et vaut x.

(b) C'est une conséquence directe de la question précédente : pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a construit une suite (y_n) d'éléments de D_a qui converge vers x.

3. On pose $\omega = \dfrac{\pi}{2a}$, et on note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto g(x) = \cos(\omega x)$.

(a) i. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a :

$$2\left[f(\frac{a}{2^{q+1}})\right]^2 = f(\frac{a}{2^{q+1}} + \frac{a}{2^{q+1}}) + f(\frac{a}{2^{q+1}} - \frac{a}{2^{q+1}}) = f(\frac{a}{2^q}) + f(0) = f(\frac{a}{2^q}) + 1.$$

Donc la relation est bien satisfaite.

ii. Tout d'abord, notons que g appartient bien à $\mathcal{E}$ d'après les question 1. et 3. de la partie I.

Montrons par récurrence sur q la propriété $f(\frac{a}{2^q}) = g(\frac{a}{2^q})$.

- Initialisation : on a $f(a) = 0 = g(a)$ donc la propriété est vraie pour $q = 0$.
- Hérédité : soit $q \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang q. On a :

$$\begin{aligned}2\left[f(\frac{a}{2^{q+1}})\right]^2 &= f(\frac{a}{2^q}) + 1\\ &= g(\frac{a}{2^q}) + 1 \text{ par hypothèse de récurrence}\\ &= 2\left[g(\frac{a}{2^{q+1}})\right]^2 \text{ car } g \text{ appartient à } \mathcal{E}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\left[f(\frac{a}{2^{q+1}})\right]^2 = \left[g(\frac{a}{2^{q+1}})\right]^2$, et donc $f(\frac{a}{2^{q+1}}) = \pm g(\frac{a}{2^{q+1}})$. Comme enfin les fonctions f et g sont positives sur $[0, a[$, on en déduit que $f(\frac{a}{2^{q+1}}) = g(\frac{a}{2^{q+1}})$ et la propriété au rang $q+1$.

On conclut par principe de récurrence.

iii. (question admise) Fixons $q \in \mathbb{N}$, et montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que : $f(p\frac{a}{2^q}) = g(p\frac{a}{2^q})$.

- Initialisation : on a $f(0) = g(0)$. De plus on a montré à la question précédente que $f(\frac{a}{2^q}) = g(\frac{a}{2^q})$. Donc la propriété est vraie au rang $p = 0, 1$.
- Hérédité : soit $p \geq 1$ et supposons la propriété vraie au rang p et $p-1$. Alors au rang $p+1$:

$$\begin{aligned}f((p+1)\frac{a}{2^q}) &= f(p\frac{a}{2^q} + \frac{a}{2^q})\\ &= 2f(p\frac{a}{2^q})f(\frac{a}{2^q}) - f(p\frac{a}{2^q} - \frac{a}{2^q})\\ &= 2f(p\frac{a}{2^q})f(\frac{a}{2^q}) - f((p-1)\frac{a}{2^q})\\ &= 2g(p\frac{a}{2^q})g(\frac{a}{2^q}) - g((p-1)\frac{a}{2^q}) \text{ par hypothèse de récurrence}\\ &= g((p+1)\frac{a}{2^q}) \text{ car } g \in \mathcal{E}\end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $p+1$.

On conclut par principe de récurrence.

(b) On a déjà montré que pour tout $x \in D_a$, $x \geq 0$, on a $f(x) = g(x)$. Si à présent on prend $x \in D_a$, $x < 0$, alors $-x > 0$ et $-x$ appartient à D_a. Ainsi, on a :

$$f(-x) = g(-x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x)$$

car f et g sont paires. Ainsi on a bien $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in D_a$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. D'après la question 2.(b), il existe une suite (y_n) d'éléments de D_a qui converge vers x. Par la question 3.(b), on a $f(y_n) = g(y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin les fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, on peut donc passer à la limite dans cette égalité : on obtient par caractérisation séquentielle de la limite que $f(x) = g(x)$, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$. Finalement on en déduit que $f = g$.

4. On a montré que si $f \in \mathcal{F}$, alors il existe $\omega > 0$ tel que $f(x) = \cos(\omega x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement, toute fonction de cette forme est bien dans $\mathcal{F}$ d'après les questions 1. et 3. de la partie I (et car un cos n'est pas la fonction nulle et s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$) Ainsi on a montré que
$$\mathcal{F} = \{x \mapsto \cos(\omega x) \mid \omega > 0\}.$$

Exercice 3

1. (a) f est deux fois dérivable sur $[0, 1]$ comme composée de fonctions dérivables sur $[0, 1]$, et on a pour tout $x \in [0, 1]$:
$$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} \quad ; \quad f''(x) = (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}$$
   (b) On a $f''(x) < 0$ sur $[0, 1[$ et $f''(1) = 0$. Donc f' est strictement décroissante sur $[0, 1]$.
   (c) Soient α, β tels que $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$. Puisque f' est strictement décroissante, on a $f'(\beta) \leq f'(\alpha)$. Par l'inégalité des accroissements finis appliqué à f entre α et β (on a bien que f est continue sur $[\alpha, \beta]$ et dérivable sur $]\alpha, \beta[$), on a :
$$f'(\beta)(\beta - \alpha) \leq f(\beta) - f(\alpha) \leq f'(\alpha)(\beta - \alpha).$$

2. (a) L'équation de T_a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
   (b) Soit $x \in [0, 1]$.
   - Cas $0 \leq x \leq a < 1$: on prend $\beta = a$, $x = \alpha$ dans l'inégalité précédente :
$$f'(a)(a - x) \leq f(a) - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f'(a)(x - a) + f(a).$$
   - Cas $0 < a \leq x \leq 1$: on prend $a = \alpha$ et $x = \beta$ dans l'inégalité de la question 1.(c) :
$$f(x) - f(a) \leq f'(a)(x - a) \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f'(a)(x - a) + f(a).$$

   On a donc montré que
$$\forall x \in [0, 1],\ f(x) \leq u(x).$$
   On en déduit que pour tout $a \in]0, 1[$, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f est en dessous de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a.

3. (a) L'équation de $D_{a,b}$ est $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$.
   (b) i. On a $v'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   On applique le théorème des accroissements finis entre a et b à f (f est bien continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$) : il existe $c \in]a, b[$ tel que :
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = v'(c).$$
   ii. Posons $g(x) = f(x) - v(x)$. La fonction g est bien dérivable sur $[0, 1]$, et $g'(x) = f'(x) - v'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Or f' est strictement décroissante, donc g' également. On a de plus que $g'(c) = 0$. Donc $g' > 0$ sur $[0, c[$ et $g' < 0$ sur $]c, 0]$.
   En particulier, on a que g est croissante sur $[a, c]$, décroissante sur $[c, b]$, et de plus $g(a) = g(b) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in [a, b]$, on a :
$$g(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq v(x).$$
   On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de toutes ces cordes, c'est à dire que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de toutes les droites du type $D_{a,b}$.

Remarque. Plus généralement, on a montré que si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et que f' est décroissante, alors elle satisfait les deux propriétés suivantes :

- sa courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de toutes ses tangentes ;
- sa courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de toutes ses cordes.

On dit alors que f est une fonction **concave**.

On dit que f est **convexe** si et seulement si $-f$ est concave. Ainsi une fonction dérivable f est convexe si et seulement si f' est croissante, et elle satisfait :

- sa courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de toutes ses tangentes ;
- sa courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de toutes ses cordes.

Le terme convexe provient du fait que l'ensemble $\{(x,y)|f(x) \leq y\}$ (i.e. l'ensemble des points (x,y) situés au dessus de $\mathcal{C}_f$) est convexe lorsque f est convexe.

Par exemple, la fonction $x \mapsto e^x$ est convexe, et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave. On a montré dans cet exercice que la fonction $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ est concave sur $[0,1]$. Montrer qu'elle est convexe sur $[1,+\infty[$!

Exercice 4

1. **Calcul des dérivées successives de f**

(a) La fonction f est supposée continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. On note F l'une d'entre elles. On en déduit alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t = F(ax) - F(0).$$

(b) Puisque F est dérivable en tant que primitive d'une fonction continue, on en déduit à l'aide de l'égalité précédente que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = aF'(ax) = af(ax).$$

(c) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2}f(a^n x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Initialisation : f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ par hypothèse, et on a bien $f(x) = a^0 f(a^0 x)$. Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que la propriété au rang n, c'est à dire f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2}f(a^n x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = af(ax)$. Or $x \mapsto af(ax)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Donc f' est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. De plus on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}\Big(a^{n(n+1)/2}f(a^n x)\Big) = a^{n(n+1)}a^n f'(a^n x) \\ &= a^{n(n+1)}a^n f'(a^n x) = a^{n(n+1)}a^n af(a^{n+1}x) \\ &= a^{(n+2)(n+1)}f(a^{n+1}x) \end{aligned}$$

  D'où la propriété au rang $n+1$.

On conclut par récurrence que f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2}f(a^n x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(d) En prenant $x = 0$ dans l'égalité précédente, on obtient que $f^{(n)}(0) = a^{n(n+1)/2}f(0) = F(0) - F(0) = 0$.

2. On procède par récurrence sur n.

- Initialisation : on a $\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0) = f(x)$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$:

  $$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

  On procède par intégration par parties :

  $$\begin{array}{c|ccc} + & f^{(n+1)}(t) & & \dfrac{(x-t)^n}{n!} \\ & & \searrow & \\ - & f^{(n+2)}(t) & \longleftarrow & -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{array}$$

  Les fonctions $f^{(n+1)}$ et $x \mapsto \dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc faire une intégration par parties :

  $$f(x) = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

  D'où la propriété au rang $n+1$.

On conclut par principe de récurrence.

3. (a) Toute fonction continue sur un segment est bornée sur ce segment (et y atteint ses bornes). Appliqué à f sur le segment $[-A; A]$ (où f est bien continue), ce théorème permet d'affirmer que

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in [-A; A], \qquad |f(x)| \leq M$$

On sait, d'après 1.c, que l'on a :$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$. En prenant les valeurs absolues dans cette égalité et la restreignant au segment $[-A; A]$, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-A; A], \qquad |f^{(n)}(x)| = |a|^{n(n+1)/2} |f(a^n x)|.$$

D'une part, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |a|^{n(n+1)/2} \leq 1$ puisque $a \in [-1; 1]$.
D'autre part, pour tout $x \in [-A; A]$, on a $a^n x \in [-A; A]$ puisque $a \in [-1; 1]$. Donc, on peut affirmer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-A; A], \qquad |f(a^n x)| \leq M$$

La combinaison de tous ces résultats nous dit alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-A; A], \qquad |f^{(n)}(x)| \leq M$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| && \text{d'après 2} \\ &\leq \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)| dt \right| && \text{d'après l'inégalité triangualaire} \\ &\leq \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} M dt \right| && \text{d'après 3.a et le fait que } [0,x] \text{ (ou } [x,0]) \subset [-A; A] \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} dt \right| = \begin{cases} \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!} dt = \left[-\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} & \text{si } x \in [0; A] \\ \int_x^0 \dfrac{(t-x)^n}{n!} dt = \left[\dfrac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_x^0 = \dfrac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} & \text{si } x \in [-A; 0] \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\Big|\int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!}dt\Big| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Il s'ensuit que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |f(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}M$$

Comme $x\in[-A;A]$, on a, par ailleurs, $|x|\leq A$, ce qui donne finalement :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |f(x)| \leq \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}M.$$

(c) • Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{A^n} = \frac{A}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

• Par définition de la limite, comme $\lim\limits_{n\to} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n\geq N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq\dfrac{1}{2}$.

• Une récurrence aisée permet alors de montrer que pour tout $n\geq N$, $0\leq u_n\leq\dfrac{u_N}{2^{n-N}}$. Comme enfin $\dfrac{u_N}{2^{n-N}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient par théorème d'encadrement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, ce qu'il fallait démontrer.

(d) Soit $x\in[-A,A]$. En passant à la limite dans l'inégalité de la question 3.b, on obtient $f(x)=0$. Ainsi, pour tout $x\in[-A,A]$, $|f(x)|=0$. d'où $f(x)=0$.

4. Le résultat de la question précédente nous dit que f est la fonction nulle sur $[-A;A]$ pour tout $A\in\mathbb{R}_+^*$ et donc que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Remarque: On a ainsi démontré que la seule solution possible du problème est la fonction nulle. Comme il est évident que la fonction nulle est bien solution, on peut affirmer que la fonction nulle est la seule solution de l'équation.