DS6

Devoir surveillé du 13/02/16

La calculatrice est interdite. Durée: 3h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.

Exercice 1

Soit a, b deux réels fixés tels que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$, trois fois dérivable sur $]a,b[$.
On souhaite prouver que :

$$\exists c \in]a,b[,\ f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2} + x\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f^{(3)}(c)$$

Pour ce faire, on considère la fonction ϕ définie par :

$$\forall x \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right],\ \phi(x) = f\left(\frac{a+b}{2} + x\right) - f\left(\frac{a+b}{2} - x\right) - 2xf'\left(\frac{a+b}{2}\right) - Kx^3$$

où K est choisi tel que $\phi\left(\frac{b-a}{2}\right) = 0$.

1. Justifier que ϕ est bien définie sur $\left[0, \frac{b-a}{2}\right]$. Déterminer la constante K.
2. Prouver qu'il existe $c_1 \in \left]0, \frac{b-a}{2}\right[$ tel que $\phi'(c_1) = 0$.
3. Prouver qu'il existe $c_2 \in]0, c_1[$ tel que $\phi''(c_2) = 0$.
4. Prouver qu'il existe $c \in \left]\frac{a+b}{2} - c_2, \frac{a+b}{2} + c_2\right[$ tel que $f''\left(\frac{a+b}{2} + c_2\right) - f''\left(\frac{a+b}{2} - c_2\right) = 2c_2 f^{(3)}(c)$.
5. En déduire le résultat.

Exercice 2

L'objectif du problème est d'étudier les ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ suivants :

$$\mathcal{E} = \left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) |\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)\right\}.$$

$\mathcal{F}$ est la partie constituée des éléments f de $\mathcal{E}$ tels que :

- f n'est pas la fonction identiquement nulle ;
- f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Partie I.

1. Montrer que la fonction cos est dans l'ensemble $\mathcal{E}$.
2. Montrer la formule :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ ch(x+y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y).$$

   En déduire que la fonction ch est dans l'ensemble $\mathcal{E}$.

3. Soit f dans $\mathcal{E}$. Montrer que pour tout réel α, la fonction f_α de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f_\alpha(x) = f(\alpha x)$ est dans $\mathcal{E}$.

4. On fixe un élément $f \in \mathcal{E}$. Montrer que :
   (a) $f(0) = 0$ ou 1 ;
   (b) si $f(0) = 0$, alors f est la fonction identiquement nulle ;
   (c) si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.

Partie II.

On se propose de déterminer les éléments de $\mathcal{F}$. Soit f un élément de $\mathcal{F}$. On pose $E = \{x > 0 | f(x) = 0\}$.

1. (a) Montrer que $f(0) = 1$, et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que E admet une borne inférieure que l'on notera a.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in E$ tel que $a \leq u_n \leq a + \dfrac{1}{n}$.
   (d) En déduire que $f(a) = 0$, puis que $a > 0$.
   (e) Montrer que $\forall x \in [0, a[,\ f(x) > 0$.

2. On considère l'ensemble $D_a = \left\{ a\dfrac{p}{2^q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la suite (y_n) par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = a\frac{\lfloor \frac{2^n x}{a} \rfloor}{2^n}.$$
   Montrer que la suite (y_n) est convergente et déterminer sa limite.
   (b) En déduire que tout réel est limite d'une suite d'éléments de D_a.

3. On pose $\omega = \dfrac{\pi}{2a}$, et on note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto g(x) = \cos(\omega x)$.
   (a) i. Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que $f(\frac{a}{2^q}) + 1 = 2\left[f(\frac{a}{2^{q+1}})\right]^2$.
   ii. En déduire, en raisonnant par récurrence sur q, que :
   $$\forall q \in \mathbb{N},\ f(\frac{a}{2^q}) = g(\frac{a}{2^q}).$$
   iii. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $f(p\frac{a}{2^q}) = g(p\frac{a}{2^q})$.
   (b) Prouver que pour tout $x \in D_a$, $f(x) = g(x)$.
   (c) En déduire que $f = g$.

4. En déduire tous les éléments de $\mathcal{F}$.

Exercice 3

On considère la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{array}$$

1. (a) Montrer que f est deux fois dérivable et que :

$$\forall x \in [0,1],\ f''(x) = (x^2-1)f(x).$$

   (b) En déduire les variations de la fonction f' sur$[0,1]$.

   (c) Montrer que pour tous α, β tels que $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, on a :

$$f'(\beta)(\beta-\alpha) \leq f(\beta) - f(\alpha) \leq f'(\alpha)(\beta-\alpha).$$

2. Soit $a \in]0,1[$. On note T_a la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

   (a) Donner une équation de T_a.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $u(x)$ l'ordonnée du point de T_a d'abscisse x, autrement dit, T_a a pour équation $y = u(x)$.

   (b) Montrer que :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq u(x).$$

   On pourra distinguer les cas $0 \leq x \leq a < 1$ *et* $0 < a \leq x \leq 1$.
   Interpréter géométriquement ce résultat.

3. Soient $a, b \in [0,1]$ tels que $a < b$. On note $D_{a,b}$ la droite passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

   (a) Donner une équation de $D_{a,b}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $v(x)$ l'ordonnée du point de $D_{a,b}$ d'abscisse x, autrement dit, $D_{a,b}$ a pour équation $y = v(x)$.

   (b) i. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f'(c) = v'(c).$$

   ii. Montrer que :

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq v(x).$$

   Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 4

Soit $a \in [-1, 1]$. On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. **Calcul des dérivées successives de f**

   (a) Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $\displaystyle\int_0^{ax} f(t)dt$ en fonction de x, a et F.
   En déduire une expression de $f(x)$ en fonction en fonction de x, a et F

   (b) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, a et f.

   (c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout nombre entier naturel n, on a

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).$$

   (d) En déduire, pour tout nombre entier naturel n, la valeur de $f^{(n)}(0)$.

2. Démontrer que, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n, on a

   $$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

   On pourra utiliser une intégration par parties.

3. Soit A un nombre réel strictement positif.

   (a) Justifier l'existence d'un nombre réel positif ou nul M tel que

   $$\forall x \in [-A; A], \qquad |f(x)| \leq M$$

   et en déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a

   $$\forall x \in [-A; A], \qquad |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

   (b) Soit x un nombre réel appartenant à $[-A; A]$. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a

   $$|f(x)| \leq M \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}.$$

   (c) On pose :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{A^n}{n!}.$$

   Montrer que :

   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

   En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

   (d) En déduire que $f(x) = 0$ pour $x \in [-A, A]$.

4. Que peut-on en déduire sur la fonction f ?