DS7

# Correction du devoir surveillé

## Exercice 1

1. On écrit cette fonction sous forme exponentielle :

$$\cos(x)^{\tan(x)} = \exp\left(\tan(x)ln(\cos(x))\right).$$

On a :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

En posant $u(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$ et en composant les développements limités, on obtient :

$$ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Par produit on a :

$$\tan(x)ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

En composant les développements limités, et avec $\exp(u) \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$, on trouve finalement :

$$\cos(x)^{\tan(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

2. On fait les développements à l'ordre 3 des fonctions sin et exp (car $x$ se simplifie en haut et en bas) :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$\exp(x) - 1 \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

D'où par quotient :

$$\frac{\sin(x)}{\exp(x)-1} \underset{x\to 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}$$

Enfin on a :

$$\frac{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \underset{x\to 0}{=} (1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2))(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{4} + o(x^2))$$

$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{6} + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$$

3. On se ramène en 0 en posant $h = x - 1$. On a alors :
$$g(h) = \frac{\cos(2\pi(h+1)) - 1}{\ln(1+h) - h} = \frac{\cos(2\pi h) - 1}{\ln(1+h) - h}.$$
Or $\cos(2\pi h) - 1 \sim_0 -\dfrac{(2\pi h)^2}{2}$ et $\ln(1+h) = h - \dfrac{h^2}{2} + o(h^2)$, donc $\ln(1+h) - h \sim_0 -\dfrac{h^2}{2}$. Par quotient, on obtient :
$$g(h) \sim_0 \frac{-\dfrac{(2\pi h)^2}{2}}{-\dfrac{h^2}{2}} = 4\pi^2.$$
Ainsi on a $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 4\pi^2$.

---

## Exercice 2

On pose $h = \dfrac{1}{x}$, et on fait le développement limité de $h \mapsto hf(1/h)$ en $0^+$ :
$$\begin{aligned}
hf(1/h) &= \exp(2h) + \sqrt{1+h+h^2} \\
&= \left(1 + 2h + \frac{(2h)^2}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2}(h+h^2) - \frac{1}{8}h^2 + o(h^2)\right) \\
&= 2 + \frac{5}{2}h + \frac{19}{8}h^2 + o(h^2)
\end{aligned}$$
Ainsi on en déduit que :
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} 2x + \frac{5}{2} + \frac{19}{8}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$
Ainsi la droite $y = 2x + \dfrac{5}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de $f$ au voisinage de $+\infty$. De plus puisque $\dfrac{19}{8}\dfrac{1}{x} > 0$ au voisinage de $+\infty$, la courbe représentative de $f$ est au dessus de cette tangente en $+\infty$.

---

## Exercice 3

### A. Étude d'une fonction

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et produit de fonctions dérivables, et on a :
$$f'(x) = \mathrm{sh}(1/x) - \frac{1}{x}\mathrm{ch}(1/x).$$

2. On étudie la fonction $g(x) = x\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$ sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est bien définie et dérivable sur cet intervalle, et on a :
$$g'(x) = x\mathrm{sh}(x).$$
En particulier $g'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme de plus $g(0) = 0$, on peut conclure que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. On peut donc conclure que $\mathrm{sh}(X) < X\mathrm{ch}(X)$ pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$.

   Dès lors, on a $f'(x) = \mathrm{sh}(1/x) - \dfrac{1}{x}\mathrm{ch}(1/x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donc la fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. On a :
$$f(x) = x\text{sh}(1/x) = \frac{xe^{1/x} - xe^{-1/x}}{2} = \frac{e^{1/x}}{2/x} + \frac{e^{-1/x}}{-2/x}$$
Puisque $\lim_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$, on en déduit par composition des limites que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

4. On se ramène en 0 en posant $h = 1/x$. On a alors :
$$f(h) \underset{h\to 0}{=} \frac{\text{sh}(h)}{h} = 1 + \frac{h^2}{6} + \frac{h^4}{120} + o(h^4) + o(h^5).$$
On obtient le développement suivant au voisinage de $+\infty$ :
$$f(x) = 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o\left(\frac{1}{x^5}\right).$$
En particulier, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

**B. Étude d'une suite**

1. On a vu que $f$ est continue, strictement décroissante, et que $\lim\limits_{0} f = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = 1$. $f$ réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]1, +\infty[$. Comme de plus $1 + \dfrac{1}{n} \in ]1, +\infty[$, l'équation $f(x) = 1 + \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, qu'on notera $u_n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$f(u_n) = 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{1+n} = f(u_{n+1}).$$
Puisque de plus $f$ est strictement décroissante, on en déduit que $u_n < u_{n+1}$. Donc la suite $(u_n)$ est croissante.

3. $(u_n)$ est une suite croissante. Supposons que $(u_n)$ est majorée. Alors elle converge vers une limite $\ell > 0$. Mais alors en passant à la limite dans $f(u_n) = 1 + 1/n$, on obtient ($f$ continue) :
$$f(\ell) = 1.$$
Or cette équation n'a pas de solution sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $(u_n)$ n'est pas majorée, et elle tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

4. En utilisant la question 4 de la partie I, on a :
$$f(x) - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{6x^2}.$$
Puisque $u_n \to +\infty$, on a en composant les limites :
$$f(u_n) - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{6u_n^2}$$
Or $f(u_n) - 1 = 1/n$. On en déduit donc que :
$$\frac{1}{6u_n^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{n} \quad \Rightarrow u_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{n}{6}}$$

---

## Exercice 4

1. Montrons que $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] | P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

   - $F \neq \emptyset$ car le polynôme nul est bien dans $F$ (il satisfait bien $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$).
   - Soient $P, Q \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :
   $$(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q' \quad ; \quad (\lambda P + \mu Q)'' = \lambda P'' + \mu Q''$$
   En évaluant en 1, on obtient : $(\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = 0$, $(\lambda P + \mu Q)'(1) = 0$ et $(\lambda P + \mu Q)''(1) = 0$.

   Ainsi $F$ est bien un sous-espace vectoriel d $\mathbb{R}_4[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. Par le cours sur les polynômes, on a :
$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow (X-1)^3 \text{ divise } P \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X], \quad P = (X-1)^3 Q \\ &\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, \quad P = (aX+b)(X-1)^3 \\ &\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, \quad P = aX(X-1)^3 + b(X-1)^3 \\ &\Leftrightarrow P \in Vect(X(X-1)^3, (X-1)^3) \end{aligned}$$
   Ainsi on a montré que :
$$F = \{(aX+b)(X-1)^3 | a, b \in \mathbb{R}\} = Vect(P_1, P_2)$$
   avec $P_1 = X(X-1)^3$ et $P_2 = (X-1)^3$.

3. Soit $P = 3X^4 - 8X^3 + 6X^2 - 1$. On montre (avec l'algorithme de Hörner) que 1 est racine de multiplicité 3 de $P$. Donc $P$ appartient bien à $F$ ($P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$) et on a après calculs :
$$P(X) = (3X+1)(X-1)^3 = 3P_1 + P_2.$$

---

## Problème.

### Résultats préliminaires :

1. Posons $R = P - Q$. Pour $t \in [-1, 1]$, $R(t) = P(t) - Q(t) = 0$, donc $R$ admet une infinité de racines (tout élément de $[-1, 1]$). On a donc $R = 0$ et $P = Q$.

2. La fonction $g = |f|$ est continue sur $[-1, 1]$ comme composée de fonctions qui le sont, elle est donc bornée et atteint ses bornes, en particulier son maximum. Ceci justifie l'existence de $\max_{t \in [-1,1]} |f(t)|$.

### I. Polynômes de Tchebychev :

1. Soit $x \in [-1, 1]$. On a $T_0(x) = \cos(0) = 1$, $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [-1, 1]$.
$$\begin{aligned} T_{n+2}(x) + T_n(x) &= \cos((n+2)\arccos(x)) + \cos(\arccos(x)) \\ &= 2\cos\left(\frac{(n+2)\arccos(x) + n\arccos(x)}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+2)\arccos(x) - n\arccos(x)}{2}\right) \\ &= 2\cos((n+1)\arccos(x))\cos(\arccos(x)) \\ &= 2xT_{n+1}(x), \end{aligned}$$
   ce qui donne le résultat.

3. Soit $x \in [-1, 1]$, d'après la formule de récurrence précédente :
$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$
et
$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2(2x^3 - x) - x = 4x^3 - 3x.$$

4. On prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété suivante $\mathcal{P}(n)$ : "$T_n$ est une fonction polynomiale".
   - C'est bien le cas pour $T_0 : x \mapsto 1$ et $T_1 : x \mapsto x$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.
   Alors, puisque pour tout $x \in [-1, 1]$, $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$, on peut affirmer que $T_{n+2}$ est bien une fonction polynomiale (car somme et produit de fonctions polynomiales.

   Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n$ est une fonction polynomiale.

5. Montrons par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété : $\mathcal{Q}(n)$ : "$\deg(T_n) = n$ et que le coefficient dominant $CD(T_n) = 2^{n-1}$."
   - Pour $n = 1$, $T_1 = X$ donc $\deg(T_1) = 1$ et $CD(T_1) = 1 = 2^0$.
   Pour $n = 2$, $T_2 = 2X^2 - 1$ donc $\deg(T_2) = 2$ et $CD(T_2) = 2 = 2^{2-1}$. Ainsi $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ et $\mathcal{Q}(n+1)$ sont vraies.
   On a $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ donc $\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_{n+1} - T_n)$.
   Or, $\deg(T_n) = n$, $\deg(2XT_n) = \deg(X) + \deg(T_{n+1}) = n+2$ donc $\deg(T_n) < \deg(2XT_{n+1})$).
   Ainsi, $\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_n) = n + 2$ De plus, comme $\deg(T_n) < \deg(2XT_{n+1})$), le coefficient dominant de $T_{n+2}$ est celui du polynôme $2XT_{n+1}$. Or, on a :
   $$CD(T_{n+2}) = CD(2XT_{n+1}) = 2CD(XT_{n+1}) = 2CD(T_{n+1}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$
   Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(T_n) = n$ et $CD(T_n) = 2^{n-1}$.
   De plus, $\deg(T_0) = 0$ et $CD(T_0) = 1$.

6. Montrons par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{S}(n)$ : "$T_n$ est de même parité que $n$".
   - Comme $T_0 = 1$ et $T_1 = X$, on a clairement $\mathcal{S}(0)$ et $\mathcal{S}(1)$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{S}(n)$ et $\mathcal{S}(n+1)$ sont vraies. On a $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. On a, par hypothèse de récurrence, $T_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1}T_{n+1}(X)$ et $T_n(X) = (-1)^n T_n(X)$ car $T_n$ a même parité que $n$.
   Ainsi, $T_{n+2}(-X) = 2(-X)(-1)^{n+1}T_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(X) = (-1)^{n+2}(2XT_{n+1} - T_n) = (-1)^{n+2}T_{n+2}$, donc $T_{n+2}$ est de même parité que $n+2$ ce qui prouve $\mathcal{S}(n+2)$.

   En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}(n)$ est vraie.

7. (a) Soit $\theta \in [0, \pi]$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n \arccos(\cos(\theta))) = \cos(n\theta)$ car pour tout $\theta \in [0, \pi]$, $\arccos(\cos(\theta)) = \theta$.
   (b) Soit $\theta \in [0, \pi]$. On a :
   $$\begin{aligned}\cos(n\theta) = 0 \quad &\iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{n} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad \text{car } \theta \in [0, \pi]\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble solution est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2n}, k \in [|0, n-1|] \right\}$$

(c) On sait que pour tout $\theta \in [0, \pi]$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Ainsi, d'après la question précédente, pour tout $k \in [|0, n-1|]$, $T_n\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0$. Ainsi, les $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ avec $k \in [|0, n-1|]$ sont racines de $T_n$. Or, pour $k \in [|0, n|]$, les $\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont des éléments deux à deux distincts de $[0, \pi]$, intervalle sur le quel cos est injective (car strictement décroissante), donc on a trouvé $n = \deg(T_n)$. On les a donc toutes et $T_n$ est scindé sur $\mathbb{R}$ (ses $n$ racines sont bien réelles).

(d) Comme le coefficient dominant de $T_n$ est $2^{n-1}$ (par la question précédente) la forme factorisée est

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$$

(e) On utilise les relations coefficients racines. Si on note $p_0 = T_n(0)$ et $p_n = CD(T_n)$, on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = (-1)^n \frac{p_0}{p_n}.$$

On connait $p_n = 2^{n-1}$. Reste à calculer $p_0$ :

$$p_0 = T_n(\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \text{ si } n \text{ est pair,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \text{ si } n \text{ est pair,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|T_n(x)| = |\cos(n \arccos(x))| \leq 1$. Ainsi, $\|T_n\|_\infty \leq 1$. De plus, $|T_n(1)| = |T_n(\cos(0))| = |\cos(n \times 0)| = 1$. Ainsi, $\|T_n\|_\infty \geq 1$. Finalement, on obtient $\|T_n\|_\infty = 1$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $V_n = 2^{1-n}T_n$ est un polynôme à coefficients réels car $T_n$ est à coefficients réels. De plus, comme $T_n$ a pour coefficient dominant $2^{n-1}$, $V_n$ a pour coefficient dominant 1, donc est unitaire. Enfin, $V_n$ a même degré que $T_n$, donc $n$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\|V_n\|_\infty = 2^{1-n}\|T_n\|_\infty = 2^{1-n}$.

11. Dans cette question, on se donne $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose avoir $P$ un polynôme unitaire tel que $\|P\|_\infty < 2^{1-n}$, c'est à dire que pour tout $t \in [-1, 1]$, $|P(t)| < 2^{1-n}$. Pour $k \in [|0, n|]$, on note $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

(a) $V_n$ et $P$ sont tous deux de degré $n$ donc $\deg(V_n - T) \leq n$. De plus, ils ont même coefficient dominant (1), donc les termes dominants de chacun de ses coefficients vont se simplifier en faisant la différence. Ainsi, $V_n - P$ est de degré plus petit que $n - 1$.

(b) Soit $k \in [|0, n|]$. On a $(V_n - P)(x_k) = 2^{1-n}T_n(x_k) - P(x_k) = 2^{1-n}\cos(k\pi) - P(x_k) = 2^{1-n}(-1)^k - P(x_k)$.

- Si $k$ est pair, on a donc $(V_n - P)(x_k) = 2^{1-n} - P(x_k) > 0$ (car $P(x_k) \leq |P(x_k) \leq \|P\|_\infty < 2^{1-n}$).

- Si $k$ est impair, on a $(V_n - P)(x_k) = -2^{1-n} - P(x_k) < 0$ (car $-P(x_k) \leq |P(x_k) \leq \|P\|_\infty < 2^{1-n}$).

(c) Soit $k \in [|0, n-1|]$. Le polynôme $V_n - P$ change strictement de signe sur $[x_k, x_{k+1}]$. Comme la fonction polynomiale associée est continue sur $[x_k, x_{k+1}]$, par le théorème des valeurs intermédiaires, $V_n - P$ s'annule au moins une fois sur $]x_{k+1}, x_k[$. Ceci étant vraie pour tout $k \in [|0, n-1|]$, $V_n - P$ s'annule donc au moins $n$ fois.

Le polynôme $V_n - P$ admet au moins $n$ racines distinctes. Or, $\deg(V_n - P) \leq n-1$ donc $V_n - P = 0$ et $P = V_n$. Ceci est absurde car $\|P\|_\infty < 2^{1-n} = \|V_n\|_\infty$.

Ainsi, pour tout polynômes à coefficients réels unitaires et de degré $n$, $\|P\|_\infty \geq 2^{1-n}$.

## II Majoration de l'erreur :

1. (a) Comme $t \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$, $S(t) \neq 0$. Par suite, on peut poser $\lambda = \dfrac{f(t) - P(t)}{S(t)}$, de sorte que $\phi(t) = 0$.

(b) On a $\phi(t) = 0$ d'après la question précédente, et, pour $i \in [|1, n|]$, comme $f(a_i) = P(a_i)$ et comme $S(a_i) = 0$, $\phi(a_i) = 0$. Les $a_i$ étant deux à deux distincts, et $t$ étant distinct de tous les $a_i$, ceci nous donne $n+1$ annulations de $\phi$. On les réordonne sous la forme $b_0 < \cdots < b_n$.

(c) Pour $i \in [|0, n-1|]$, $\phi$ est continue sur $[b_i, b_{i+1}]$ et dérivable sur $]b_i, b_{i+1}[$ (comme combinaison linéaire de fonction qui le sont, $f$ étant $\mathcal{C}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $\phi(b_i) = 0 = \phi(b_{i+1})$. Par le théorème de Rolle, on a $c_i \in ]b_i, b_{i+1}[$ tel que $\phi'(c_i) = 0$. Comme $c_0 < \cdots < c_{n-1}$, ceci nous donne $n$ annulations de $\phi'$ dans $[-1, 1]$.

Montrons par récurrence sur $i \in [|0, n|]$ la propriété $\mathcal{P}(i)$ : "$\phi^{(i)}$ s'annule $n+1-i$ fois dans $[-1, 1]$" (Rolle en cascade).

- On a montré $\mathcal{P}(0)$ dans la question précédente.
- Soit $i \in [|0, n-1|]$ tel que $\mathcal{P}(i)$ est vraie.
  $\phi^{(i)}$ admet alors $n+1-i$ annulations dans $[-1, 1]$. Notons $c_1 < ... < c_{n+1-i}$ des points d'annulations de $\phi^{(i)}$. Pour tout $k \in [|1, n-i|]$, $\phi^{(i)}$ est continue sur $[c_k, c_{k+1}]$ et dérivable sur $]c_k, c_{k+1}[$ (comme combinaison linéaire de fonction qui le sont, $f$ étant $\mathcal{C}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $i < n$) et $\phi^{(i)}(c_k) = 0 = \phi^{(i)}(c_{k+1})$. Par le théorème de Rolle, on a $d_k \in ]c_k, c_{k+1}[$ tel que $\phi^{(i+1)}(d_k) = 0$. De plus, $d_1 < ... < d_k$. Ainsi, $\phi^{(i+1)}$ s'annule $n-i$ fois dans $[-1, 1]$. On a donc prouvé $\mathcal{P}(i+1)$.

En conclusion, $\forall i \in [|0, n|]$, $\mathcal{P}(i)$ est vraie. En particulier, on a $\mathcal{P}(n)$, donc $\phi^{(n)}$ s'annule au moins une fois dans $[-1, 1]$. On note $a$ un point où $\phi^{(n)}$ s'annule.

(d) $\deg(S) = \sum\limits_{i=1}^{n} 1 = n$. De plus $S$ est unitaire. Ainsi, il existe $a_0, ..., a_{n-1}$ des réels tels que $S = X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. $\deg\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k\right) \leq n-1$. Ainsi, $S^{(n)} = (X^n)^{(n)} + 0 = n!$. $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $P^{(n)} = 0$.

Ainsi, $\phi^{(n)} = f^{(n)} - P^{(n)} - \lambda S^{(n)} = f^{(n)} - \lambda n!$.

(e) Par définition de $\phi$ et par choix de $\lambda$, on a $0 = \phi(t) = f(t) - P(t) - \lambda S(t)$.

Ainsi, $f(t) - P(t) = \lambda S(t)$. Or, en utilisant la relation de la question précédente évaluée en $a$, on trouve : $0 = \phi^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - \lambda n!$. D'où $\lambda = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Finalement, on obtient : $f(t) - P(t) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} S(t)$.

2. Soit $t \in [-1, 1]$.

- Si $t \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$, on a vu dans les questions précédentes qu'il existe $a \in [-1, 1]$ tel que $f(t) - P(t) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} S(t)$. On a alors $|f(t) - P(t)| \leq \dfrac{|f^{(n)}(a)|}{n!} |S(t)| \leq \dfrac{M_n}{n!} |S(t)|$. (On notera que l'existence de $M_n$ est assurée par la continuité de $f^{(n)}$.)

- Si maintenant $t \in \{a_1, \dots, a_n\}$, on a $f(t) = P(t)$ et $S(t) = 0$, donc l'inégalité est encore vérifiée.

3. $S$ est un polynôme unitaire de degré $n$. D'après le résultat principal du I, $\|S\|_\infty$ est minimal quand
$S = 2^{1-n}T_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$, c'est-à-dire quand les $a_k$ sont les racines de $T_n$ : $a_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)$ pour $k \in [|1, n|]$. On a alors $\|S\|_\infty = 2^{1-n}$, donc $|f(t) - P(t)| \leq \frac{M_n}{n!}|S(t)| \leq \frac{M_n}{n!}2^{1-n}$.

---