DS8

Correction du devoir surveillé

Problème 1. Étude d'une fonction intégrale

On étudie dans ce problème la fonction F définie par :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \int_1^x \frac{ln(t)}{1+t^2}dt.$$

La courbe représentative de F sera notée Γ.

1. (a) Posons $g(t) = \dfrac{ln(t)}{1+t^2}$ pour tout $t > 0$. g est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc F est bien définie comme l'unique primitive d'une fonction continue que s'annule en 1.
On a pour tout $t \in]1, +\infty[$, $g(t) > 0$, donc $F(x) = \displaystyle\int_1^x g(t)dt > 0$ pour tout $x > 1$.
De même, pour tout $t \in]0, 1[$, $g(t) < 0$, donc $F(x) = \displaystyle\int_1^x g(t)dt = \int_x^1 (-g(t))dt > 0$ pour tout $0 < x < 1$.
Ainsi $F(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, et $F(1) = 0$.

(b) F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Pour tout $x > 0$, on a :
$$F'(x) = g(x) = \frac{ln(x)}{1+x^2}.$$
Comme $g(x) < 0$ si $x \in]0, 1[$, $g(1) = 0$ et $g(x) > 0$ si $x \in]1, +\infty[$, on en déduit que F est strictement décroissante sur $]0, 1[$, puis strictement croissante sur $]1, +\infty[$. De plus, $F(1) = F'(1) = 0$ et Γ admet une tangente horizontale en 1.

(d) On détermine le $DL_2(1)$ de g. Pour cela, on pose $h = x - 1$. On a :
$$g(1+h) = \frac{ln(1+h)}{1+(1+h)^2} = \frac{ln(1+h)}{2+2h+h^2} = \frac{1}{2}\frac{ln(1+h)}{1+(h+\frac{h^2}{2})}.$$
On a :
$$ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2).$$
$$\frac{1}{1+(h+\frac{h^2}{2})} = 1-(h+\frac{h^2}{2})+(h+\frac{h^2}{2})^2+o(h^2) = 1-(h+\frac{h^2}{2})+h^2+o(h^2) = 1-h+\frac{h^2}{2}+o(h^2).$$
D'où :
$$g(1+h) = \frac{1}{2}(h-\frac{h^2}{2}) \times (1-h+\frac{h^2}{2}) + o(h^2) = \frac{1}{2}(h-h^2-\frac{h^2}{2}) + o(h^2) = \frac{h}{2} - \frac{3h^2}{4} + o(h^2).$$
D'où en intégrant à présent (en suivant le cours, il faut dire que g est $\mathcal{C}^2$...) :
$$F(1+h) = F(1) + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{4} + o(h^3),$$
soit finalement :
$$F(x) = \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(x-1)^3}{4} + o((x-1)^3).$$

2. Pour tout $x > 0$, on a $F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{ln(t)}{1+t^2}dt$.

   On effectue le changement de variables $u = \frac{1}{t}$. On a alors $du = -\frac{1}{t^2}dt$, soit encore $dt = -\frac{1}{u^2}du$. Et lorsque $t : 1 \to x$, on a $u : 1 \to 1/x$. On obtient donc :

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = -\int_1^x \frac{ln(1/u)}{1+(1/u)^2}\frac{1}{u^2}du = \int_1^x \frac{ln(u)}{u^2+1}du = F(x).$$

3. (a) On sait déjà que ϕ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues sur cet intervalle. Faisons de plus un développement limité de ϕ à l'ordre 1 en 0 :

$$\phi(x) = \frac{1}{x}(x + o(x^2)) = 1 + o(x).$$

   Ainsi, ϕ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\phi(0) = 1$.

   Remarque. On peut même en déduire que ce prolongement est dérivable en 0 et que sa dérivée en 0 vaut 0.

   (b) On effectue une intégration par parties :

$$\begin{array}{c|ccc} + & ln(t) & & \frac{1}{1+t^2} \\ & & \searrow & \\ - & \frac{1}{t} & \xleftarrow{\int} & \arctan(t) \end{array}$$

   Les fonctions $t \mapsto ln(t)$ et $t \mapsto \arctan(t)$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. D'où :

$$F(x) = [\arctan(t)ln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{\arctan(t)}{t} = \arctan(x)ln(x) - \int_1^x \phi(t)dt.$$

   (c) On cherche la limite de F en 0. D'une part,

$$\arctan(x) \sim_0 x \quad \text{d'où} \quad \arctan(x)ln(x) \sim_0 xln(x).$$

   Or par croissance comparées, $\lim_{x\to 0} xln(x) = 0$, donc $\lim_{x\to 0} \arctan(x)ln(x) = 0$.
   D'autre part, puisque ϕ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$, la fonction intégrale $x \mapsto \int_1^x \phi(t)dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers $-\int_0^1 \phi(t)dt$ lorsque $x \to 0$.
   On en déduit que F admet une limite finie en 0, égale à $\int_0^1 \phi(t)dt$. Donc F est prolongeable par continuité en 0 en posant $F(0) = \int_0^1 \phi(t)dt$.
   Enfin, puisque $F(x) = F(1/x)$, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} F(1/x) = F(0).$$

   Donc Γ admet une asymptote horizontale en $+\infty$, d'équation $y = F(0)$.

   (d) On a $\lim_{x\to 0+} F'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{ln(x)}{1+x^2} = -\infty$. Donc F n'est pas dérivable en 0, et Γ admet une tangente verticale en 0.

4. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. On effectue une intégration par parties :

$$\begin{array}{c|ccc} + & ln(t) & & t^k \\ & & \searrow & \\ - & \frac{1}{t} & \xleftarrow{\int} & \frac{t^{k+1}}{k+1} \end{array}$$

Les fonction $t \mapsto ln(t)$ et $t \mapsto t^{k+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. D'où

$$\begin{aligned} I_k(x) &= \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^k}{k+1} dt = \frac{x^{k+1}}{k+1} ln(x) - \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_1^x \\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1} ln(x) - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \end{aligned}$$

(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2},$$

somme des termes d'une série géométrique de raison $-x^2 \neq 1$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0, \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} \left| F(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) \right| &= \left| \int_1^x \left(\frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \right) ln(t) dt \right| \\ &= \left| \int_1^x \left((-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \right) ln(t) dt \right| \\ &\leq \int_x^1 \left| (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} ln(t) \right| dt \\ &= \int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} ln(t) dt = I_{2n+2}(x) \end{aligned}$$

(d) On a :

$$\lim_{x \to 0^+} I_{2k}(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} ln(x) - \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

D'où en passant à la limite dans la majoration précédente (tous les termes convergent !) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |F(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}| = |F(0) - u_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$$

(e) On cherche n tel que $\dfrac{1}{(2n+3)^2} \leq 10^{-2}$, on obtient $n \geq 4$. Donc $u_4 = 0,92$ est une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(0)$.

5.

Problème 2. Endomorphismes cycliques

Partie I. Exemples.

1. Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}^3$. Considérons l'application suivante de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$u(x, y, z) = (6z, x - 11z, y + 6z).$$

   (a) Soient $v = (x_1, y_1, z_1), w = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda v + \mu w = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2).$$

$$\begin{aligned} u(\lambda v + \mu w) &= (6(\lambda z_1 + \mu z_2), (\lambda x_1 + \mu x_2) - 11(\lambda z_1 + \mu z_2), (\lambda y_1 + \mu y_2) + 6(\lambda z_1 + \mu z_2)) \\ &= \lambda(6z_1, x_1 - 11z_1, y_1 + 6z_1) + \mu(6z_2, x_2 - 11z_2, y_2 + 6z_2) \\ &= \lambda u(v) + \mu u(w) \end{aligned}$$

   Donc u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

   (b) On a :

$$u(1, 0, 0) = (0, 1, 0) \quad ; \quad u^2(1, 0, 0) = u(0, 1, 0) = (0, 0, 1).$$

   Ainsi, $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \in Vect(u^k(1, 0, 0)/k \in \mathbb{N})$. Comme $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ (c'est la base canonique !), on a donc :

$$Vect(u^k(1, 0, 0)/k \in \mathbb{N}) = \mathbb{R}^3.$$

   Ainsi u est un endomorphisme cyclique.

2. Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'endomorphisme de dérivation u défini pour tout $P \in E$ par $u(P) = P'$.

   (a) Soit $P_0 \in E$ un polynôme de degré $d \geq 0$. On a :

$$u^k(P_0) = P_0^{(k)} \text{ pour } 0 \leq k \leq d \quad \text{ et } \quad u^k(P_0) = 0 \text{ pour } k > d.$$

   Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(P_0) \in \mathbb{R}_d[X]$. Comme de plus, $\mathbb{R}_d[X]$ est un espace vectoriel, on obtient :

$$Vect(u^k(P_0)/k \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{R}_d[X].$$

   De plus, $Vect(u^k(P_0)/k \in \mathbb{N}) = Vect(u^k(P_0)/0 \leq k \leq d)$, et la famille de polynômes $(P_0, u(P_0), \ldots, u^d(P_0))$ est échelonnée en degré. C'est donc une famille libre, et $\dim(Vect(u^k(P_0)/k \in \mathbb{N})) = d + 1$. Comme on a $\dim \mathbb{R}_d[X] = d + 1$, on obtient finalement :

$$Vect(u^k(P_0)/k \in \mathbb{N}) = \mathbb{R}_d[X].$$

   (b) Prenons P_0 de degré n (par exemple $P_0 = X^n$). Alors d'après ce qu'on a fait, on a :

$$Vect(u^k(P_0)/k \in \mathbb{N}) = \mathbb{R}_n[X] = E.$$

   Donc u est bien cyclique également.

3. Dans cette question, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice $p \geq 2$ (i.e. $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$).

(a) Prenons $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0_E$ (existe car $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$). Montrons que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0))$ est libre : soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 u(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0_E.$$

On applique u^{p-1} à cette égalité :

$$\lambda_0 u^{p-1}(x_0) = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = 0(\text{ car } u^{p-1}(x_0) \neq 0_E).$$

On obtient en remplaçant $\lambda_1 u(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0_E$. En appliquant u^{p-2}, on obtient $\lambda_1 = 0$, et ainsi de suite, $\lambda_k = 0$ pour tout k.
Ainsi la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0))$ est libre. Son cardinal est donc inférieur ou égal à la dimension de E, soit $p \leq n$.

(b) $\Rightarrow$ Supposons que u est cyclique, alors il existe $x_0 \in E$ tel que :

$$E = Vect(u^k(x_0)/k \in \mathbb{N}) = Vect(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0)).$$

La famille $(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0))$ est donc génératrice, et son cardinal est supérieur à la dimension de E, soit $p \geq n$. Comme on a de plus $p \leq n$, on obtient ainsi que $p = n$.

$\Leftarrow$ Supposons que $p = n$. On sait qu'il existe x_0 tel que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ soit une famille libre. Comme elle est de cardinal n, c'est donc une base de E. Ainsi,

$$Vect(u^k(x_0)/k \in \mathbb{N}) = Vect(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)) = E$$

et u est bien un endomorphisme cyclique.

Partie II. Étude générale.

Dans cette partie, on note u un endomorphisme cyclique de l'espace vectoriel E, avec E de dimension $n \geq 1$. On fixe $x_0 \in E$ tel que $E = Vect(u^k(x_0)/k \in \mathbb{N})$.

1. (a) La famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^n(x_0))$ est de cardinal $n+1$ dans un espace vectoriel E de dimension n, elle est donc liée.

   (b) Tout d'abord, notons que comme $E \neq \{0_E\}$ et que $E = Vect(u^k(x_0)/k \in \mathbb{N})$, alors $x_0 \neq 0_E$. Considérons l'ensemble $A = \{k \in \mathbb{K}/(x_0, u(x_0), \ldots, u^k(x_0)) \text{ libre}\}$. C'est un ensemble non vide de $\mathbb{N}$ (car $0 \in A$, la famille (x_0) étant libre), et majorée par n ($(x_0, u(x_0), \ldots, u^n(x_0))$ est liée, et toute surfamille de cette famille est donc liée). On en déduit qu'il existe un entier p, maximal, pour lequel la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^p(x_0))$ soit libre.

   (c) Par définition de p, la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^p(x_0))$ est libre et $(x_0, u(x_0), \ldots, u^p(x_0), u^{p+1}(x_0))$ est liée. Par le cours, on sait alors que $u^{p+1}(x_0) \in Vect(x_0, u(x_0), \ldots, u^p(x_0))$

   (d) On procède par récurrence.
   - **Initialisation.** Pour tout $0 \leq k \leq p$, on a bien $u^k(x_0) \in Vect(x_0, u(x_0), \ldots, u^p(x_0))$ donc la propriété est vraie aux rang $0 \leq k \leq p$. Elle est vraie également au rang $p+1$ par la question précédente.
   - **Hérédité.** Soit $k \geq p$ et supposons la propriété vraie au rang k. Montrons la propriété au rang $k+1$.
     Par hypothèse de récurrence, on a $u^k(x_0) \in Vect(x_0, u(x_0), \ldots, u^p(x_0))$. Il existe donc $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}, \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$ tels que :

     $$u^k(x_0) = \lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) + \lambda_p u^p(x_0)).$$

     On compose par u :

     $$u^{k+1}(x_0) = \lambda_0 u(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} u^p(x_0) + \lambda_p u^{p+1}(x_0)).$$

     Or on a $u(x_0), \ldots, u^p(x_0), u^{p+1}(x_0)) \in Vect(x_0, u(x_0), \ldots, u^p(x_0))$, donc $u^{k+1}(x_0) \in Vect(x_0, u(x_0), \ldots, u^p(x_0))$. D'où la propriété au rang $k+1$.

On conclut par principe de récurrence.

(e) On a montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x_0) \in Vect(x_0, u(x_0), \dots, u^p(x_0))$. Ainsi, on a :

$$E = Vect(u^k(x_0)/k \in \mathbb{N}) = Vect(x_0, u(x_0), \dots, u^p(x_0)).$$

La famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^p(x_0))$ est donc génératrice de E. Comme c'est une famille libre par définition de p, c'est donc une base de E. Son cardinal est donc égal à la dimension de E, soit $p+1=n$.

2. (a) On a montré précédemment que $u^n(x_0) \in Vect(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$, donc il existe $(p_0, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$u^n(x_0) = p_0x_0 + p_1u(x_0) + \dots + p_{n-1}u^{n-1}(x_0).$$

Dans la suite, on posera $P(X) = X^n - p_{n-1}X^{n-1} - \dots - p_1X - p_0 \in \mathbb{K}[X]$.

(b) On a $P(u) = u^n - p_{n-1}u^{n-1} - \dots - p_1u - p_0Id_E \in \mathbb{K}[X]$, d'où en évaluant :

$$P(u)(x_0) = u^n(x_0) - p_{n-1}u^{n-1}(x_0) - \dots - p_1u(x_0) - p_0x_0 = 0_E.$$

$$\begin{aligned} P(u)(u(x_0)) &= u^n(u(x_0)) - p_{n-1}u^{n-1}(u(x_0)) - \dots - p_1u(u(x_0)) - p_0u(x_0) \\ &= u(u^n(x_0) - p_{n-1}u^{n-1}(x_0) - \dots - p_1u(x_0) - p_0x_0) = u(0_E) = 0_E. \end{aligned}$$

De même, on a $P(u)(u^k(x_0)) = 0_E$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$.
Ainsi $P(u)$ est un endomorphisme de E qui s'annule sur la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$, c'est donc l'endomorphisme nul : $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
On dit que P est un polynôme annulateur de u.

(c) Montrons que $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$: soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$\lambda_0 Id_E + \lambda_1 u + \dots + \lambda_{n-1}u^{n-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On évalue en x_0 :

$$\lambda_0x_0 + \lambda_1u(x_0) + \dots + \lambda_{p-1}u^{n-1}(x_0) = 0_E.$$

Or la famille de vecteurs $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre dans E. Donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$. Ainsi $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

(d)
- Supposons qu'un tel polynôme $Q = a_0 + a_1X + \dots + a_qX^q$ existe : $q < n$ et $Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors on aurait :

$$a_0Id_E + a_1u + \dots + a_qu^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Comme $Q \neq 0$, il existe $a_i \neq 0$, et la famille $(Id_E, u, \dots, u^q)$ serait liée. Mais alors la surfamille $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$ serait liée également, ce qui est faux car $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre.

- Soit $Q = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0$ un polynôme unitaire de degré n tel que $Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors :

$$u^n - p_{n-1}u^{n-1} - \dots - p_1u - p_0Id_E = u^n - a_{n-1}u^{n-1} - \dots - a_1u - a_0Id_E.$$

D'où :

$$p_{n-1}u^{n-1} + \dots + p_1u + p_0Id_E = a_{n-1}u^{n-1} + \dots + a_1u + a_0Id_E.$$

Par unicité de la décomposition d'un vecteur dans la famille libre $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$, on en déduit :

$$p_k = a_k \quad \text{pour tout } 0 \leq k \leq n-1.$$

Ainsi $P = Q$, et P est bien l'unique polynôme unitaire de degré n tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Le polynôme P est appelé le polynôme minimal de u.

(e) On procède comme précédemment pour trouver ce polynôme : on écrit $u^3(1,0,0)$ en fonction de $(1,0,0), u(1,0,0), u^2(1,0,0)$. Or on a :

$$u(1,0,0) = (0,1,0) \quad ; \quad u^2(1,0,0) = (0,0,1) \quad ; \quad u^3(1,0,0) = (6,-11,6).$$

Ainsi, $u^3(1,0,0) = 6(1,0,0) - 11u(1,0,0) + 6u^2(1,0,0)$ et le polynôme minimal de u est donc :

$$P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6.$$

Partie III. Étude du commutant.

1. Tout d'abord $\mathcal{C}(u) \subset \mathcal{L}(E)$ est non vide car l'endomorphisme nul commute bien avec u.

   Soient $f, g \in \mathcal{C}(u)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Montrons que $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}(u)$:

   $$u \circ (\lambda f + \mu g) = \lambda u \circ f + \mu u \circ g = \lambda f \circ u + \mu g \circ = (\lambda f + \mu g) \circ u.$$

   Donc le commutant $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) / u \circ v = v \circ u\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2. On a déjà de manière évidente que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k \in \mathcal{C}(u)$. Comme de plus $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, les combinaisons linéaires de tels vecteurs sont aussi dans $\mathcal{C}(u)$. Ainsi pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a bien $P(u) \in \mathcal{C}(u)$. D'où l'inclusion $\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{C}(u)$

3. (a) Soient deux endomorphismes v et w de $\mathcal{C}(u)$. Supposons que $v(x_0) = w(x_0)$, et montrons que $v = w$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

   $$v(u^k(x_0)) = v \circ u^k(x_0) = u^k \circ v(x_0) = u^k \circ w(x_0) = w(u^k(x_0)).$$

   Ainsi v et w coïncident sur la base $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$. Elles sont donc égales.

   (b) Soit $v \in \mathcal{C}(u)$.

   i. Comme $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E, donc une famille génératrice de E, il existe bien $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v(x_0) = a_{n-1}u^{n-1}(x_0) + \dots + a_1 u(x_0) + a_0 x_0$.

   ii. Posons $w = a_{n-1}u^{n-1} + \dots + a_1 u + a_0 Id_E$. On a clairement que w commute avec u (c'est un polynôme en u !). De plus on a $v(x_0) = w(x_0)$. Par la question précédente, on en déduit immédiatement que $v = w$.

4. On a déjà que $\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{C}(u)$. Réciproquement, on vient de montrer que si $v \in \mathcal{C}(u)$, alors $v \in \mathbb{K}[u]$. On en déduit donc que $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u]$.

5. On sait déjà que la famille $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre, et qu'il existe un unique polynôme P de degré n et unitaire tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (c'est le polynôme minimal). On va montrer que :

   $$K[u] = Vect(Id_E, u, \dots, u^{n-1}).$$

   Prenons un élément de $K[u]$, il est de la forme $A(u)$ avec $A \in \mathbb{K}[X]$. On fait la division euclidienne de A par P : il existe un couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que :

   $$\begin{cases} A = QP + R \\ \deg(R) < n \end{cases}$$

   On évalue en u :

   $$A(u) = Q(u) \circ P(u) + R(u).$$

   Or $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc $A(u) = R(u)$. Comme enfin $\deg(R) < n$, on en déduit que $R(u) \in Vect(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$. Finalement, on a bien que :

   $$\mathcal{C}(u) = K[u] = Vect(Id_E, u, \dots, u^{n-1}).$$

   La famille $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$ étant libre et génératrice de $\mathcal{C}(u)$, c'est donc une base de cet espace, et $\dim(\mathcal{C}(u)) = n$.

Remarque. On peut en fait montrer les équivalences suivantes : soit $u \in \mathcal{L}(E)$,

u est cyclique $\quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u] \quad\Leftrightarrow\quad \dim(\mathcal{C}(u)) = n \quad\Leftrightarrow\quad$ le polynôme minimal de u est de degré n.

La preuve de ces équivalences pourra être vu en deuxième année.
