DS8

Devoir surveillé du 04/05/16

Durée: 3h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.

Problème 1. Étude d'une fonction intégrale

On étudie dans ce problème la fonction F définie par :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \int_1^x \frac{ln(t)}{1+t^2}dt.$$

La courbe représentative de F sera notée Γ.

1. (a) Déterminer le signe de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Justifier la continuité et la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Calculer $F'(x)$ pour $x > 0$. En déduire les variations de F.
   (d) Écrire le développement limité de F à l'ordre 3 au voisinage de $x = 1$.

2. Montrer que : $\forall x > 0, \quad F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. (a) Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0, \quad \phi(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$.
   Montrer que ϕ est prolongeable par continuité en 0.
   (b) Montrer que : $\forall x > 0, \quad F(x) = \arctan(x)ln(x) - \int_1^x \phi(t)dt$.
   (c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. Que peut-on en déduire sur l'allure de Γ en $+\infty$?
   (d) Montrer que F n'est pas dérivable à droite en 0. Que peut-on en déduire de l'allure de Γ au point d'abscisse 0 ?

4. Dans cette question, on cherche à calculer une valeur approchée de $F(0)$.
   (a) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, calculer $I_k(x) = \int_1^x t^k ln(t)dt$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0, \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$, $\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \leq I_{2n+2}(x)$.
   (d) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |F(0) - u_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$.
   (e) Donner, *en détaillant la méthode utilisée*, une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(0)$.

5. Tracer l'allure de la courbe Γ.

Problème 2. Endomorphismes cycliques

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Pour tout endomorphisme u de E, on note $u^0 = Id_E$ (application identité de E), et pour tout entier naturel k, $u^{k+1} = u^k \circ u$.

Si $Q(X) = q_0 + q_1 X + \cdots + q_m X^m \in \mathbb{K}[X]$, on pose pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$Q(u) = q_0 Id_E + q_1 u + \cdots + q_m u^m \in \mathcal{L}(E).$$

On dit qu'un endomorphisme u de E est cyclique s'il existe un élément $x_0 \in E$ tel que :

$$E = Vect(u^k(x_0)/k \in \mathbb{N}) = Vect(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \dots).$$

Les différentes parties sont dans une large mesure indépendantes.

Partie I. Exemples.

1. Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}^3$. Considérons l'application suivante de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$u(x, y, z) = (6z, x - 11z, y + 6z).$$

   (a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calculer $u(1, 0, 0)$ et $u^2(1, 0, 0)$. En déduire que u est un endomorphisme cyclique.

2. Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'endomorphisme de dérivation u défini pour tout $P \in E$ par $u(P) = P'$.

   (a) Soit $P_0 \in E$ un polynôme de degré $d \geq 0$. Montrer que $Vect(u^k(P_0)/k \in \mathbb{N}) = \mathbb{R}_d[X]$.

   (b) u est-il cyclique ?

3. Dans cette question, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice $p \geq 2$ (i.e. $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$).

   (a) Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ soit libre.
   Que peut-on en déduire sur p ?

   (b) En déduire que u est cyclique si et seulement si $p = n$.

Partie II. Étude générale.

Dans cette partie, on note u un endomorphisme cyclique de l'espace vectoriel E, avec E de dimension $n \geq 1$. On fixe $x_0 \in E$ tel que $E = Vect(u^k(x_0)/k \in \mathbb{N})$.

1. (a) Montrer que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^n(x_0))$ est liée.

   (b) Montrer qu'il existe un entier p, maximal, pour lequel la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^p(x_0))$ soit libre.

   (c) Montrer que $u^{p+1}(x_0) \in Vect(x_0, u(x_0), \dots, u^p(x_0))$.

   (d) Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x_0) \in Vect(x_0, u(x_0), \dots, u^p(x_0))$.

   (e) En déduire que $(x_0, u(x_0), \dots, u^p(x_0))$ est une base de E, et que $p = n - 1$.

2. (a) Justifier l'existence de $(p_0, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$u^n(x_0) = p_0 x_0 + p_1 u(x_0) + \cdots + p_{n-1} u^{n-1}(x_0).$$

   Dans la suite, on posera $P(X) = X^n - p_{n-1}X^{n-1} - \cdots - p_1 X - p_0 \in \mathbb{K}[X]$.

(b) Déterminer l'image par l'endomorphisme $P(u)$ des vecteurs de la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$. En déduire que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
On dit que P est un polynôme annulateur de u.

(c) Montrer que $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

(d) En déduire que :

- il n'existe aucun polynôme non nul Q de degré strictement inférieur à n tel que $Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$;
- P est l'unique polynôme unitaire de degré n tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Le polynôme P est appelé le polynôme minimal de u.

(e) Application. Déterminer le polynôme minimal de l'endomorphisme u de la Partie I. 1.

Partie III. Étude du commutant.

Dans cette partie, u désigne toujours un endomorphisme cyclique de l'espace vectoriel E, avec E de dimension $n \geq 1$. On fixe $x_0 \in E$ tel que $E = Vect(u^k(x_0)/k \in \mathbb{N})$. On rappelle qu'alors, la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

1. Montrer que le commutant $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E)/u \circ v = v \circ u\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2. Notons $\mathbb{K}[u] = \{Q(u)/Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Montrer que $\mathbb{K}[u]$ est inclus dans $\mathcal{C}(u)$.

3. (a) Soient deux endomorphismes v et w de $\mathcal{C}(u)$. Montrer que, si $v(x_0) = w(x_0)$, alors $v = w$.
   (b) Soit $v \in \mathcal{C}(u)$.
      i. Justifier l'existence de $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v(x_0) = a_{n-1}u^{n-1}(x_0) + \cdots + a_1u(x_0) + a_0x_0$.
      ii. Montrer que $v = a_{n-1}u^{n-1} + \cdots + a_1u + a_0Id_E$.

4. Décrire $\mathcal{C}(u)$.

5. Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(u)$.
