DS9

Correction du devoir surveillé

Exercice 1

a) On développe par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+2} &= \Delta_{n+1} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -3 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \Delta_{n+1} + 3 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -3 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \Delta_{n+1} + 6\Delta_n
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité est obtenue en développant par rapport à la première colonne. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Delta_{n+2} = \Delta_{n+1} + \Delta_n.$$

b) Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On considère l'équation caractéristique :

$$r^2 - r - 6 = 0 = (r+2)(r-3).$$

On en déduit qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\Delta_n = \alpha(-2)^n + \beta 3^n$ On regarde les conditions initiales :

$$\Delta_1 = 1 \quad ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7.$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -2\alpha + 3\beta = 1 \\ 4\alpha + 9\beta = 7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 10\alpha = 4 & (2) - 3(1) \\ 15\beta = 9 & 2(1) + (2) \end{cases}$$

Ainsi $\alpha = \frac{2}{5}$ et $\beta = \frac{3}{5}$. On obtient finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta_n = \frac{2}{5}(-2)^n + \frac{3}{5}3^n.$$

Problème 1.

Préliminaires.

1. Montrons que P^{-1} est un pseudo-inverse de P :
$$P^{-1}PP^{-1} = P^{-1} \quad ; \quad PP^{-1}P = P \quad ; \quad P^{-1}P = PP^{-1}.$$

2. Notons U un pseudo-inverse de A et soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrons que $P^{-1}UP$ est un pseudo-inverse de $P^{-1}AP$.
$$(P^{-1}UP)(P^{-1}AP)(P^{-1}UP) = P^{-1}U(PP^{-1})A(PP^{-1})UP = P^{-1}UAUP = P^{-1}UP.$$
$$(P^{-1}AP)(P^{-1}UP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A(PP^{-1})U(PP^{-1})AP = P^{-1}AUAP = P^{-1}AP.$$
$$(P^{-1}UP)(P^{-1}AP) = P^{-1}U(PP^{-1})AP = P^{-1}UAP = P^{-1}AUP = (P^{-1}AP)(P^{-1}UP).$$

Partie I. Étude d'un exemple.

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a en utilisant la matrice A :
$$f(x, y, z) = (x + y, 2x + 3y + z, 3x + 5y + 2z).$$

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :
$$f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 3x+5y+2z=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ 2y+2z=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$
On obtient un système échelonné réduit, à deux inconnues principales (x et z) et une inconnue paramètre (1). On en déduit ainsi que :
$$Ker(f) = \{(-y, y, -y) | y \in \mathbb{R}\} = Vect((-1, 1, -1)).$$
Ainsi une base de $Ker(f)$ est donnée par $f_3 = (1, -1, 1)$ et sa dimension est 1.

3. Puisque f n'est pas injective, ce n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, et sa matrice A dans la base canonique n'est donc pas inversible. On a de plus par le théorème du rang :
$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(Ker(A)) + rg(A) = 1 + rg(A).$$
Ainsi $rg(A) = 2$.

4. On pose
$$f_1 = (0, 1, 2), \quad f_2 = (1, 2, 3), \quad f_3 = (1, -1, 1)$$
et on note $\mathcal{C}$ la famille (f_1, f_2, f_3).

   (a) On peut par exemple calculer le déterminant de ces trois vecteurs dans la base canonique (on développe par rapport à la première ligne) :
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(1+2) + (3-4) = -4.$$
   Donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Par le cours on a :

$$\mathrm{Im}(f) = Vect(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = Vect((1,2,3),(1,3,5),(0,1,2)).$$

Or f_1 et f_2 appartiennent à $\mathrm{Im}(f)$. Ces deux vecteurs sont non colinéaires, donc linéairement indépendants. Comme de plus $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2, on en déduit que (f_1, f_2) est une base de $\mathrm{Im} f$. Comme enfin $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on peut conclure par le cours que :

$$\mathbb{R}^3 = Ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f).$$

(c) On a $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons son inverse par l'algorithme de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \Leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \Leftarrow L_3 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \Leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \Leftarrow L_3/4}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \Leftarrow L_2 - L_3, L_1 \Leftarrow L_1 + L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \Leftarrow L_1 - 2L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/4 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} -5/4 & -1/2 & 3/4 \\ 3/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$.

(d) On calcule les images des vecteurs de $\mathcal{C}$ par f :

$$f(f_1) = (1,5,9) = 3f_1 + f_2 \quad ; \quad f(f_2) = (3,11,19) = 5f_1 + 3f_2 \quad ; \quad f(f_3) = (0,0,0).$$

On obtient donc la matrice suivante de f dans la base $\mathcal{C}$:

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi $\alpha = 3$, $\beta = 5$, $\gamma = 1$, $\delta = 3$, et $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Les deux colonnes de A_1 sont non colinéaires, donc A_1 est de rang 2 et est inversible. On a par la formule du cours :

$$A_1^{-1} = \frac{1}{\det(A_1)} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'où $\alpha' = 3$, $\beta' = -5$, $\gamma' = -1$ et $\delta' = 3$.

6. Posons $U' = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie que :

$$A'U' = U'A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et que :

$$A'U'A' = A' \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

$$U'A'U' = U' \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U'.$$

Ainsi U' est un pseudo-inverse de la matrice A'.

7. Par les formules de changement de bases, on a $A' = P^{-1}AP$, soit encore $A = PA'P^{-1}$. Par la question préliminaire, on en déduit que $U = PU'P^{-1}$ est un pseudo inverse de la matrice A

8. Notons π l'endomorphisme canoniquement associé à UA.
   (a) On effectue le changement de base pour obtenir la matrice de π dans la base $\mathcal{C}$:
   $$P^{-1}UAP = (P^{-1}UP)(P^{-1}AP) = U'A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (b) On en déduit que π satisfait :
   $$\pi(f_1) = f_1 \quad ; \pi(f_2) = f_2 \quad , \quad \pi(f_3) = 0.$$
   Ainsi π est la projection sur $Vect(f_1, f_2) = \mathrm{Im}(f)$ dans la direction de $Vect(f_3) = Ker(f)$.

Partie II. Unicité du pseudo-inverse.

1. Calculons le produit $AUAU'$:
   $$AUAU' = AU' \qquad \text{et } AUAU' = UAU'A = UA$$
   Ainsi on a bien $UA = AU'$.
2. On a $U = UAU = AU'U = U'AU = U'UA = U'AU' = A$. D'où l'unicité du pseudo-inverse.

Partie III. Condition d'existence du pseudo-inverse.

1. (a) On a $(AU)^2 = AUAU = AU$ par (1). Comme de plus AU est la matrice de $f \circ g$ dans la base canonique, on en déduit que $f \circ g$ est un projecteur.
   (b) i. On a déjà par l'identité matricielle (3) que $f \circ g = g \circ f$. Ainsi $Ker(f \circ g) = Ker(g \circ f)$, et on a l'inclusion immédiate dans $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$. Réciproquement soit $x \in Ker(g \circ f)$, on a :
   $$g \circ f(x) = 0 \quad \Rightarrow f \circ g \circ f(x) = 0$$
   Or la matrice dans la base canonique de $f \circ g \circ f$ est $AUA = A$, donc on a l'égalité $f \circ g \circ f = f$. On en déduit finalement $f(x) = 0$, et donc $x \in Ker(f)$.

ii. On a déjà l'inclusion immédiate $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$. Réciproquement soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$. On obtient alors en appliquant $f \circ g$:

$$f \circ g(y) = f \circ g \circ f(x).$$

Or la matrice de $f \circ g \circ f$ dans la base canonique est $AUA = A$, et donc $f \circ g \circ f = f$. On en déduit donc que :

$$f \circ g(y) = f(x) = y.$$

Ainsi on a bien que y appartient à $\mathrm{Im}(f \circ g)$ et donc que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f \circ g$.

(c) Puisque $f \circ g$ est un projecteur, on en déduit que :

$$\mathbb{R}^n = Ker(f \circ g) \oplus Im(f \circ g).$$

En utilisant les points (i) et (ii), on en déduit donc que :

$$\mathbb{R}^n = Ker(f) \oplus Im(f).$$

Ainsi $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires.

2. (a) Si $Ker(A) = \{0\}$, alors A est inversible et admet pour pseudo-inverse A^{-1} d'après les questions préliminaires.
Si $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$, alors $A = 0_{n,n}$ et admet pour pseudo inverse la matrice $0_{n,n}$ (les trois relations sont satisfaites de façon immédiates).

(b) Pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$, on a $f(y) \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Im}(f)$ est bien stable par f et on peut considérer l'endomorphisme induit sur $\mathrm{Im}(f)$:

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathrm{Im} f & \to & \mathrm{Im} f \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Cette application est linéaire. Elle est de plus injective car si $x \in Ker(\tilde{f})$, alors $\tilde{f}(x) = 0 = f(x)$ et donc $x \in \mathrm{Im}(f) \cap Ker(f) = \{0\}$ par hypothèse. Comme de plus on est en dimension finie, on en déduit que $\tilde{f}$ est un automorphisme de $\mathrm{Im}(f)$.

(c) On s'inspire de l'exemple traité à la partie I. On considère $(f_1, \ldots, f_r)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $(f_{r+1}, \ldots, f_n)$ une base de $Ker(f)$ (à noté que $1 \leq r \leq n-1$ est le rang de f ($r \neq 0, n$ par hypothèse), et que $n - r$ est bien la dimension de $Ker(f)$ par le théorème du rang). Comme de plus $\mathrm{Im}(f)$ et $Ker(f)$ sont en somme direct par hypothèse, on en déduit que $\mathcal{C} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
Regardons la forme de la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$:

- pour tout $1 \leq i \leq r$, on a $f(f_i) \in \mathrm{Im}(f) = Vect(f_1, \ldots, f_r)$ car $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f. Donc il existe $a_{1,i}, \ldots, a_{r,i}$ tels que :

$$f(f_i) = \tilde{f}(f_i) = a_{1,i} f_1 + \ldots, a_{r,i} f_r.$$

- pour tout $r + 1 \leq i \leq n$, $f(f_i) = 0$.

On obtient donc la matrice suivante A' de f dans la base $\mathcal{C}$ soit de la forme

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} \end{pmatrix}$ est par définition même la matrice de $\tilde{f}$ dans la base $\{f_1, \ldots, f_r\}$ de $\mathrm{Im}(f)$. Puisque $\tilde{f}$ est inversible, c'est donc un automorphisme.

(d) Là aussi, on s'inspire de la partie I. On considère $B_1 = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r,1} & \cdots & b_{r,r} \end{pmatrix}$ l'inverse de A_1, et $U' = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r,1} & \cdots & b_{r,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie alors par calcul que :

$$U'A' = \begin{pmatrix} 1 & & (0) & \\ & \ddots & \vdots & (0) \\ (0) & & 1 & \\ & & & (0) \\ & (0) & & \end{pmatrix} = A'U'$$

et que $A'U'A' = A'$, $U'A'U' = U'$. Ainsi A' admet pour pseudo-inverse U'.

(e) On utilise encore le préliminaire : $U = PU'P^{-1}$ est le pseudo inverse de $A = PA'P^{-1}$.

3. Une condition nécessaire et suffisante pour A d'avoir un pseudo inverse est donc que $Ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ soient en somme directe.

Remarque. On peut montrer (cf. TD Applications linéaires, ou redémontrez-le) que ceci est encore équivalent à $rg(f) = rg(f^2)$. Ainsi on a :

$$A \text{ admet un pseudo inverse} \quad \Leftrightarrow \quad rg(A) = rg(A^2).$$

Problème 2. Étude d'un procédé de sommation

Partie I. Etude de deux exemples

1. (a) D'après la formule du binôme,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

(b) On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha = \frac{\alpha}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \alpha.$

(c) Comme $\alpha \neq 0$, les séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$ sont grossièrement divergentes.

2. (a) La formule du binôme indique que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = \frac{1}{2^n}(z+1)^n.$$

(b) On suppose que $|z| < 1$.

i. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait calculer les sommes géométriques. La raison z étant différente de 1, $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}$.

Pour $|z| < 1$, $z^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Ainsi, $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{1-z}$ donc $\sum(a_n)$ converge et

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a d'après l'inégalité triangulaire $|a_n^*| = \left|\frac{z+1}{2}\right| \leq \frac{1+|z|}{2} < 1$ et $\sum_{n\geq 0}(a_n^*)$ est donc aussi une série géométrique convergente de somme

$$\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n^* = \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = \frac{2}{1-z} = 2A(z)$$

(c) i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n \geq |z| \geq 1$ donc $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge.

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^* = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, d'après la question 2.a. Ainsi, $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ est une série géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ avec $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ donc $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ converge.

iii. D'après la question 2.a, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n^* = \left(\frac{1+e^{i\theta}}{2}\right)^n$. Ainsi, (a_n^*) est une suite géométrique de raison $r = \frac{1+e^{i\theta}}{2} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$. Ainsi, $|r| = \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$. Comme $\theta \in]-\pi,0[\cup]0,\pi[$, $|r| \in]0,1[$ et $\sum_{n\geq 0}(a_n^*)$ converge. De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_k^* &= \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\left(\frac{1+e^{i\theta}}{2}\right)}\\ &= \frac{2}{1-e^{i\theta}} = \frac{2}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{2}{-2ie^{i\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\\ &= \frac{ie^{-i\theta/2}}{\sin(\theta/2)} = 1 + i\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\end{aligned}$$

Partie II : Etude du procédé de sommation

1. **Comparaison des convergences des deux suites.**

(a) i. On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

car pour tout $p \in [|0,k-1|]$, $n-p \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{n^k}{2^n k!} = \frac{e^{k\ln(n)-n\ln(2)}}{k!} = \frac{e^{-n\ln(2)\left(1-k\frac{\ln(n)}{n}\right)}}{k!}$.

Par croissance comparées, on a $\lim_{n\to+\infty}\left(1-k\frac{\ln(n)}{n}\right) = 1$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{2^n k!} = 0$.

Par équivalence, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 0$.

(b) D'après la question précédente, pour tout $k \in [|0,n_0|]$, $\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$. Ainsi, n_0 étant fixé, $S_{n_0}(n)$ est alors une somme finie de termes de limite nulle et

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n_0}(n) = 0$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle, il existe un rang $N > 0$ tel que pour tout $k \geq N,\ |a_k| \leq \varepsilon$.
Soit $n \geq N$. En sommant les inégalités précédentes pour k allant de N à n, on a :

$$\sum_{k=N}^{n} \binom{n}{k} \frac{|a_k|}{2^n} \leq \sum_{k=N}^{n} \binom{n}{k} \frac{\epsilon}{2^n} = \frac{\epsilon}{2^n} \sum_{k=N}^{n} \binom{n}{k} \leq \frac{\epsilon}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \epsilon$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} |a_n^*| = \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}\right| &\leq \left|\sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}\right| + \left|\sum_{k=N}^{n} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}\right| \\ &\leq \left|\sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}\right| + \sum_{k=N}^{n} \binom{n}{k} \frac{|a_k|}{2^n} \\ &\leq \left|\sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}\right| + \epsilon \end{aligned}$$

La suite $(S_{N-1}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant de limite nulle, d'après la question précédente, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que
$\forall n \geq N',\ |S_{N-1}(n)| \leq \epsilon$. On a alors

$$\forall n \geq \max(N, N'),\ |a_n^*| = 2\epsilon$$

On a donc montré que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^* = 0$$

(d) On a

$$a_n^* - l = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a_k - l)$$

car $\displaystyle\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1$. On se ramène ainsi au cas précédent $(a_n - l \to 0)$. Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (a_n^* - l) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n^* = l$.

(e) Si $a_n = (-2)^n$ alors (a_n^*) est une suite convergente de limite nulle (car $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$) alors que (a_n) est une suite divergente car $(|-z| \geq 1)$. Il n'y a donc pas équivalence entre les convergences de (a_n) et de (a_n^*).

2. **Comparaison des convergences des séries $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n^*$.**

(a) $U_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} a_k^* = a_0^* = a_0 = S_0$

$U_1 = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{1} a_k^* = 2a_0^* + 2a_1^* = 2a_0 + \sum_{k=0}^{1} a_k = 2S_0 + S_1$

$$\begin{aligned} U_2 = 4\sum_{k=0}^{2} a_k^* &= 4a_0^* + 4a_1^* + 4a_2^* = 4a_0 + 2\sum_{k=0}^{1} a_k + \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a_k \\ &= 4a_0 + 2(a_0 + a_1) + (a_0 + 2a_1 + a_2) = (a_0 + a_1 + a_2) + 3(a_1 + a_0) + 3a_0 \\ &= S_2 + 3S_1 + 3S_0 \end{aligned}$$

(b) La formule est vraie pour $n=0$ d'après la question précédente car $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\binom{1}{k+1}S_k = S_0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la formule soit vraie au rang n. On remarque que

$$U_{n+1} = 2^{n+1}T_{n+1} = 2^{n+1}(T_n + a_{n+1}^*) = 2U_n + 2^{n+1}a_{n+1}^*$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$U_{n+1} = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a_k$$

On utilise alors la remarque de l'énoncé pour exprimer a_k à l'aide de S_k et S_{k-1}. Ainsi,

$$U_{n+1} = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(S_k - S_{k-1})$$

En réordonnant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k}\right)S_k + S_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+1}S_k + S_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+2}{k+1}S_k
\end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.
Par principe de récurrence, on peut conclure que la formule est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a:

$$U_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}S_k = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}S_{k-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}v_k = 2^n v_n^*,$$

car $S_{-1} = 0$.

(b) On sait que $\sum a_n$ converge. Ainsi, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons S sa limite. On sait alors que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S. D'après la question 1.d, on peut alors en déduire que la suite (v_n^*) converge. vers S.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{U_n}{2^n} = 2\dfrac{U_n}{2^{n+1}} = 2v_{n+1}^* \underset{n\to+\infty}{\to} 2S$.
On peut donc conclure que la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

4. Si $a_n = (-2)^n$ alors $\sum a_n$ diverge alors que $\sum a_n^*$ converge (cf question 2.c.ii). Les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ ne sont donc pas toujours même nature.