PCSI 5 **Note /10**

Interrogation de cours 11 du Lundi 7 Décembre 2015

Nom et prénom :

1. (**/ 1 point**) Donner la caractérisation de $M = \sup(A)$ avec des quantificateurs :

$$M = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq M \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A \text{ tel que } M - \epsilon < x \end{cases}$$

2. (**/ 0,5 point**) Soit $(p, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, $p = E(x) \Leftrightarrow E(x) \leq x < E(x) + 1$.

3. (**/ 1 point**) Montrer que l'application partie entière $x \in \mathbb{R} \to E(x)$ est croissante.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \leq y$. Alors $E(x) \leq y$. Ainsi, $E(x)$ est un entier plus petit que y. Comme $E(y)$ est le plus grand entier plus petit que y, on obtient : $E(x) \leq E(y)$.

4. (**/ 1,5 point**) Ecrire avec des quantificateurs qu'une suite (u_n) :

- tend vers 0 : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in N$, $(n \geq N) \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon$.
- diverge vers $-\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow u_n \leq A$.
- est non borne : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, |u_n| > M$.

5. (**/ 1 point**) Enoncer le théorème des gendarmes :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites vérifiant :

- $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \leq v_n \leq w_n$
- Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

6. (**/ 1 point**) Que dire d'une suite croissante ?

Toute suite (u_n) croissante et majorée de réels converge, et a pour limite :

$$\lim u_n = \sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}.$$

Toute suite (u_n) croissante non-majorée de réels diverge vers $+\infty$.

7. (**/ 2 point**) Donner la définition et la proposition des suites adjacentes.

On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante ;
- $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante. Alors :

(1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l ;

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l \leq v_n$.

8. (**/ 1 point**) Que peut-on dire de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = sin(n\pi/4)$? Justifier.

Les sous-suites (u_{4n}) et (u_{4n+2}) sont convergentes (elles sont constantes) et convergent respectivement vers 0 et 1. Puisque ces limites sont différentes, on en déduit que la suite (u_n) diverge.

9. (/ **1 point**) On considère la suite u_n définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_n en fonction de n.

C'est une suite arithmético-géométrique. On cherche le point fixe α tel que $\alpha = 2\alpha - 3$. On obtient $\alpha = 3$. Par différence de $u_{n+1} = 2u_n - 3$ par $\alpha = 2\alpha - 3$, on a $(u_{n+1} - 3) = 2(u_n - 3)$. La suite $(u_n - 3)_n$ est donc géométrique. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - 3 = 2^n(u_0 - 3) \Leftrightarrow u_n = -2^{n+1} + 3.$$