PCSI 5 **Note /10**

Interrogation de cours 15 du Lundi 18 Janvier 2016

Nom et prénom :

1. (**/ 1 points**) Compléter :
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$, et dans ce cas, son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2. (**/ 2 points**) Donner 4 caractérisations différentes de $A \in GL_n(\mathbb{K})$:
- il existe $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' \times A = I_n$;
- il existe $A'' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \times A'' = I_n$;
- le système $AX = 0$ admet une seule solution ($X = 0$) ;
- le rang de la matrice A est n ;
- $A \underset{L}{\sim} I_n$;
- pour toute matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution ;
- pour toute matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.

3. (**/ 1 points**) Compléter :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k - B^k = (A-B)\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^i B^{k-i-1}\right) \quad \text{si } A \text{ et } B \text{ commutent.}$$

4. (**/ 2 points**) Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs que :
- f a pour limite 2 en $a \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - 2| \leq \varepsilon$.
- f a pour limite $+\infty$ en $a \in \mathbb{R}$: $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) \geq M$.
- f a pour limite $a \in \mathbb{R}$ en $+\infty$: $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow |f(x) - a| \leq \varepsilon$.
- f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$: $\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq A \Rightarrow f(x) \leq M$.

5. (**/ 1 points**) Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \overline{I}$. On a l'équivalence :

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \lim_{n\to+\infty} u_n = a,\ \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l\right).$$

6. (**/ 1 points**) Énoncer le théorème d'encadrement (limite finie) :
Soient f, g et h trois fonctions de I dans $\mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = l \\ \lim\limits_{x\to a} h(x) = l \end{cases} \qquad \text{alors : } \lim_{x\to a} g(x) \text{ existe et vaut } l.$$

7. (**/ 1 points**) Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\to b} f(x)$?
Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$. Sinon on a $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.

8. (**/ 1 points**) Montrer que $f : x \mapsto \cos(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0^+.
On considère les deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n = \frac{1}{2\pi n}$ et $v_n = \frac{1}{\pi + 2\pi n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\lim u_n = \lim v_n = 0^+$ et $\lim f(u_n) = 1 \neq -1 = \lim f(v_n)$. Donc f n'a pas de limite en 0^+ (par théorème de caractérisation de la limite).