PCSI 5 **Note /10**

Interrogation de cours 16 du Lundi 1 Février 2016

Nom et prénom :

1. (**/ 2 points**) Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs que :

- f est k-lipschitzienne sur I : $\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$;
- $M = \sup_I f$: $\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) \leq M \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in I,\ f(x_\varepsilon) \geq M - \varepsilon \end{cases}$.
- f admet un maximum absolu sur I : $\exists c \in I,\ \forall x \in I,\ f(x) \leq f(x)$.
- f admet un minimum local en $a \in I$: $\exists \eta > 0$, $\forall x \in I$, $|x-a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq f(a)$.

2. (**/ 1 points**) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires :

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a,b) \in I^2$ tels que $f(a)f(b) \leq 0$. Alors il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.

3. (**/ 1 points**) Que peut-on dire d'une fonction continue sur $[a,b]$?

Elle est bornée et elle atteint ses bornes : il existe $c, d \in [a,b]$ tels que :

$$\forall x \in [a,b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

4. (**/ 1 points**) Énoncer le théorème de dérivabilité de la bijection réciproque.

Soient $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement monotone sur I et dérivable en a. Alors, $f(I)$ est un intervalle, $f : I \to f(I)$ est bijective, et :

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } b = f(a) \text{ si, et seulement si,} f'(a) \neq 0$$

et dans ce cas :

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

5. (**/ 1 points**) Énoncer le théorème des accroissements finis :

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

6. (**/ 1 points**) Énoncer le théorème de passage à la limite sur la dérivée :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, dérivable sur $I \backslash \{a\}$. Si $f' : I \backslash \{a\}$ admet une limite l (finie ou infinie) quand $x \to a$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} l$.

En particulier si l est finie, f est dérivable en a et f' est continue en a et donc $f'(a) = l$.

7. (**/ 1 points**) Compléter :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 1} \frac{\tan(x)}{x} = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \lim_{x \to 1} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \cos(1) - 1.$$

8. (/ **2 points**) Vrai ou Faux :

V **F**

☐ ■ L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle ouvert.

■ ☐ L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé.

■ ☐ Une fonction lipschitzienne est continue.

☐ ■ Toute fonction dérivable à droite et à gauche en a est dérivable en a.

■ ☐ Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f est lipschitzienne.

☐ ■ Si $f'(c) = 0$, alors f admet un extremum local en c.

☐ ■ Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ dérivable et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.