PCSI 5 **Note /10**

Interrogation de cours 17 du Lundi 8 Février 2016

Nom et prénom :

1. (**/ 1 points**) Énoncer le théorème de passage à la limite sur la dérivée :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, dérivable sur $I\backslash\{a\}$. Si $f' : I\backslash\{a\}$ admet une limite l (finie ou infinie) quand $x \to a$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$.

En particulier si l est finie, f est dérivable en a et f' est continue en a et donc $f'(a) = l$.

2. (**/ 1 points**) Classer les suites de la plus négligeable à la plus prépondérante : $n, n!, 2^n, \ln(n)^10, n^2$.

$$\ln(n)^{10} \quad << \quad n \quad << \quad n^2 \quad << \quad 2^n \quad << \quad n!$$

3. (**/ 2 points**) Vrai ou Faux :

V F

■ ☐ Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $u_n w_n \sim v_n t_n$.

☐ ■ Si $u_n \sim v_n$, alors $\exp(u_n) \sim \exp(v_n)$

■ ☐ Si $u_n - v_n \to 0$, alors $\exp(u_n) \sim \exp(v_n)$

☐ ■ Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $u_n + w_n \sim v_n + t_n$.

■ ☐ Si $u_n \sim v_n$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.

☐ ■ Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^n = v_n^n$.

4. (**/ 1 points**) Classer les fonctions suivantes de la plus négligeable à la plus prépondérante au voisinage de $+\infty$: $\ln(x), \sqrt{x}, \sqrt{e^x}, x^2, \dfrac{1}{\sqrt{\ln(x)}}, \dfrac{1}{x}$.

$$\frac{1}{x} << \frac{1}{\sqrt{\ln(x)}} << \ln(x) << \sqrt{x} << x^2 << \sqrt{e^x}.$$

5. (**/ 2 points**) Equivalents usuels :

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad \tan(x) \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad \cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2 \quad ; \quad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

$$\frac{x+2x^2}{x^2-4x^4} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x} \quad ; \quad \frac{x+2x^2}{x^2-4x^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{2x^2} \quad ; \quad (1+x)^3 - 1 \underset{0}{\sim} 3x \quad ; \quad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$$

6. (**/ 2 points**) Donner les $DL_4(0)$ des fonctions suivantes :

- $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$
- $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
- $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
- $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$

7. (**/ 1 points**) Donner un $DL_2(0)$ de $g(x) = \dfrac{ch(x) - 1}{x^2}$. Que peut-on en déduire pour g en 0 ?

On a $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)$. g admet donc un $DL_2(0)$, donc a fortiori d'ordre 1 également. On en déduit que g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1/2$ et ce prolongement est dérivable en 0 avec $g'(0) = 0$.