PCSI 5 **Note /10**

Interrogation de cours 18 du Lundi 15 Février 2016

Nom et prénom :

1. (**/ 4 points**) Donner les $DL_4(0)$ des fonctions suivantes :

- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$
- $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
- $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
- $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$
- $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$
- $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{48}x^3 - \frac{15}{16\times 24}x^4 + o(x^4)$
- $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$
- $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

2. (**/ 1 point**) Énoncer la formule de Taylor-Young :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en tout point a de I qui est

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

3. (**/ 2 points**) Calculer un $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\tan(x)}{1+sh(x)}$.

On fait le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{sh}(x)}$:

$$u(x) = \mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad ; \quad u(x)^2 = x^2 + o(x^3) \quad ; \quad u(x)^3 = x^3 + o(x^3).$$

Alors $\dfrac{1}{1+\mathrm{sh}(x)} = 1 - x - \frac{x^3}{6} + x^2 - x^3 + o(x^3) = 1 - x + x^2 - \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$, et :

$$\begin{aligned}\frac{\tan(x)}{1+sh(x)} &= (x + \frac{x^3}{3})(1 - x + x^2 - \frac{7}{6}x^3) + o(x^3)\\ &= x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

4. (**/ 2 points**) Soit $f(x) = (x+1)e^{1/x}$. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et déterminer sa position relative.

On cherche un $DL_2(+\infty)$ de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. On pose pour cela $h = 1/x$, et on fait un $DL_2(0)$ de $h \mapsto hf(1/h) = (1+h)e^h$.

$$hf(1/h) \underset{h\to 0}{=} 1 + 2h + \frac{3}{2}h^2 + o(h^2).$$

Ainsi $f(x) \underset{x\to +\infty}{=} x + 2 + \frac{3}{2x} + o(1/x)$. La droite $y = x + 2$ est donc asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, et $\mathcal{C}_f$ est au dessus de cette droite au voisinage de $+\infty$.

5. (**/ 1 point**) Formules : P et Q deux polynômes.

- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$ si $\deg(Q) \geq 1$.