PCSI 5 **Note /10**

Interrogation de cours 20 du Lundi 14 Mars 2016

Nom et prénom :

1. (**/ 2 points**) Donner les trois définitions équivalentes de a racine de multiplicité exactement r de P :

(1) $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$, $P = (X-a)^r Q$ et $Q(a) \neq 0$

(2) $(X-a)^r$ divise P et $(X-a)^{r+1}$ ne divise pas P ;

(3) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(r-1)}(a) = 0$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$.

2. (**/ 2 points**) Donner la définition d'un polynôme irréductible.

Un polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit irréductible sur $\mathbb{K}$ s'il satisfait :

$$\forall A, B \in \mathbb{K}[X], \quad P(X) = A(X)B(X) \quad \Rightarrow \quad \deg(A) = 0 \text{ ou } \deg(B) = 0.$$

Quels sont les polynômes irréductibles dans :

- $\mathbb{C}[X]$: les polynômes de degré un.
- $\mathbb{R}[X]$: les polynômes de degré un et les polynômes de degré deux à $\Delta < 0$.

3. (**/ 1 points**) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé, $a_1, \cdots, a_n$ ses racines. Énoncer le lien entre coefficients et racines.

$$-\frac{p_{n-1}}{p_n} = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad (-1)^n \frac{p_0}{p_n} = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

4. (**/ 1 points**) Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Donner la définition d'un sous espace vectoriel de E.

$F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si

(i) $F \neq \emptyset$;

(ii) $\forall (x,y) \in F^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda.x + \mu.y \in F$.

5. (**/ 2 points**) Montrer que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 3x - 2y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel (en utilisant la définition des s.e.v.).

- $F \neq \emptyset$: $0_{\mathbb{R}^3} \in F$ car $3 \times 0 - 2 \times 0 + 0 = 0$.
- F stable par combinaison linéaire : $\forall u = (x,y,z), v = (x',y',z') \in F$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$ et on a :

$$3(\lambda x + \mu x') - 2(\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') = \lambda \underbrace{(3x - 2y + z)}_{=0} + \mu \underbrace{(3x' - 2y' + z')}_{=0} = 0.$$

Donc $\lambda u + \mu v \in F$.

6. (**/ 1 points**) Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $e_1, \ldots, e_n \in E$. Compléter :

$$Vect(e_1, \ldots, e_n) = \{\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n | \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$

7. (**/ 1 points**) Écrire $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 3x - 2y + z = 0\}$ sous la forme $F = Vect(X)$ avec X une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 3x - 2y + z = 0\} &= \{(x, y, -3x + 2y) | x, y \in \mathbb{R}\} \\ = \{x(1,0,-3) + y(0,1,2) | x, y \in \mathbb{R}\} &= Vect((1,0,-3), (0,1,2)) \end{aligned}$$